Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. И. Черноусов, А. С. Рапинчук, И. А. Рапинчук, Алгебры с делением, имеющие одинаковые максимальные подполя, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 1(421), 89–122

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9649

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 73.251.173.144
22 марта 2020 г., 22:52:39

2015 г. январь — февраль *т. 70, вып. 1 (421)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 512.552

Посвящается В. П. Платонову в связи с его 75-летием

Алгебры с делением, имеющие одинаковые максимальные подполя

В. И. Черноусов, А. С. Рапинчук, И. А. Рапинчук

В статье приводится обзор недавних результатов по проблеме характеризации конечномерных алгебр с делением в терминах их максимальных подполей. Мы также обсуждаем обобщения этой проблемы и ее различные приложения. В последнем разделе рассматривается более широкая постановка задачи в контексте абсолютно простых алгебраических групп.

Библиография: 51 название.

Ключевые слова: алгебра с делением, неразветвленная группа Брауэра, полупростые алгебраические группы.

DOI: 10.4213/rm9649

Содержание

1. Введение . . . 89
2. Мотивировки . . . 92
3. Род алгебры с делением . . . 95
4. Ветвление алгебр с делением . . . 100
5. Некоторые модификации понятия рода . . . 109
6. Род алгебраической группы . . . 111
Список литературы . . . 119

1. Введение

Цель этой статьи – дать обзор недавних работ по проблеме характеризации конечномерных алгебр с делением в терминах их максимальных подполей и, более общо, простых алгебраических групп в терминах их максимальных торов. Мы рассматриваем следующий вопрос, а также его вариации, которые будут обсуждены позже.

(†) *Что можно сказать о двух конечномерных центральных алгебрах с делением D_1 и D_2 над полем K при условии, что D_1 и D_2 имеют одинаковые (с точностью до изоморфизма) максимальные подполя?*

© В. И. Черноусов, А. С. Рапинчук, И. А. Рапинчук, 2015

Точнее, условие, наложенное на D_1 и D_2, означает, что они имеют *одинаковую степень* n над K (т.е. $\dim_K D_1 = \dim_K D_2 = n^2$) и расширение P/K степени n может быть вложено в D_1 над K тогда и только тогда, когда оно может быть вложено в D_2.

Напомним, что расширение F поля K называется *полем разложения* центральной простой алгебры A степени n, если существует изоморфизм F-алгебр $A \otimes_K F \simeq M_n(F)$. Кроме того, если A – алгебра с делением, то поля разложения степени n над K – это в точности максимальные подполя в A (см., например, [15; теорема 4.4]). Поскольку поля разложения и/или максимальные подполя K-алгебры с делением D или, более общо, любой конечномерной центральной простой алгебры являются основой для анализа ее структуры, естественно возникает вопрос, в какой степени эти поля на самом деле определяют D. В случае, когда рассматриваются *все* поля разложения, ответ на этот вопрос был получен в 1955 г. Ш. Амицуром [2]:

Если A_1 и A_2 – конечномерные центральные простые алгебры над полем K, имеющие одинаковые поля разложения (т.е. расширение поля F/K расщепляет A_1 тогда и только тогда, когда оно расщепляет A_2), то классы $[A_1]$ и $[A_2]$ в группе Брауэра $\mathrm{Br}(K)$ порождают одну и ту же подгруппу: $\langle [A_1] \rangle = \langle [A_2] \rangle$.

В доказательстве этой теоремы (см. [2], [21; гл. 5]) используются так называемые *поля разложения общего типа*, которые имеют *бесконечную* степень над K. Однако ситуация резко меняется, если допускаются только конечномерные поля разложения. Это показывает следующий пример кубической алгебры с делением над $\mathbb{Q}$.

Сначала напомним теорему Альберта–Брауэра–Хассе–Нётер, которая утверждает, что для глобального поля K имеется точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v \in V^K} \mathrm{Br}(K_v) \xrightarrow{\sum \mathrm{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0, \tag{ABHN}$$

где V^K – множество всех (классов эквивалентности) нормирований поля K, K_v – пополнение K относительно v и inv_v – так называемый *инвариант*, задающий изоморфизм $\mathrm{Br}(K_v) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, когда v – неархимедово нормирование, и изоморфизм $\mathrm{Br}(K_v) \simeq (1/2)\,\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, когда v вещественно (см., например, [1; гл. VII, § 9.6] и [34; § 18.4] для числовых полей, [21; § 6.5] для функциональных полей; историю вопроса см. в [42]). Зафиксируем целое $r \geqslant 2$ и возьмем r различных простых чисел $p_1, \ldots, p_r$. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ – произвольный набор из r элементов, где $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ и $\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \equiv 0 \pmod 3$. Согласно (ABHN), существует кубическая алгебра с делением $D(\varepsilon)$ над $\mathbb{Q}$ со следующими локальными инвариантами (рассматриваемыми как элементы $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$):

$$\mathrm{inv}_p\, D(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_i}{3}, & p = p_i,\ i = 1, \ldots, r; \\ 0, & p \notin \{p_1, \ldots, p_r\} \text{ (включая } p = \infty). \end{cases}$$

Тогда для любых двух наборов $\varepsilon' \neq \varepsilon''$ такого вида алгебры $D(\varepsilon')$ и $D(\varepsilon'')$ имеют одинаковые конечномерные поля разложения и, следовательно, одни и те же максимальные подполя (см. [34; § 18.4, следствие b]), но не являются изоморфными. Ясно, что количество таких наборов ε растет с ростом r, поэтому этот метод позволяет построить *произвольно большое* (но конечное) число попарно неизоморфных кубических алгебр с делением над $\mathbb{Q}$, имеющих одинаковые максимальные подполя (в то же время циклические подгруппы $\langle [D(\varepsilon)] \rangle$ имеют порядок 3).

Подобная конструкция применима для алгебр с делением любой степени $d > 2$. С другой стороны, из (ABHN) следует, что *тело кватернионов* D над числовым полем определяется с точностью до изоморфизма своим набором максимальных подполей (см. раздел 3). Таким образом, рассмотрение только конечномерных полей разложения (и, в частности, максимальных подполей) делает вопрос (†) весьма нетривиальным и интересным.

Для анализа алгебр с делением, имеющих одинаковые максимальные подполя, удобно ввести следующее понятие. Пусть D – конечномерная центральная алгебра с делением над полем K. Мы определяем *род* D следующим образом:

$$\mathbf{gen}(D) = \{[D'] \in \mathrm{Br}(K) \mid D' \text{ – алгебра с делением, имеющая те же максимальные подполя, что и } D\}.$$

Среди различных вопросов, связанных с понятием рода, мы остановимся в данной работе на следующих двух.

Вопрос 1. *Когда* $\mathbf{gen}(D)$ *сводится к одному элементу* (*т. е. когда* D *определяется своими максимальными подполями однозначно с точностью до изоморфизма*)?

Вопрос 2. *Когда множество* $\mathbf{gen}(D)$ *конечно*?

Структура статьи следующая. Мы представим имеющиеся результаты по вопросам 1 и 2 в разделе 3; общий подход к их изучению, основанный на анализе ветвлений в алгебрах с делением, будет изложен в разделе 4. Далее в разделе 5 мы кратко рассмотрим несколько других полезных понятий рода, в том числе *локальный род* и *односторонний род*. Наконец, в разделе 6 мы дадим обзор продолжающихся исследований, целью которых является распространение анализа алгебр с делением, имеющих одинаковые максимальные подполя, на алгебраические группы с одними и теми же классами изоморфных или изогенных максимальных торов.

Обозначения. Для поля K с дискретным нормированием v обозначим через K_v его пополнение относительно v; пусть $\mathscr{O}_v \subset K_v$ – кольцо нормирования и $\overline{K}_v$ – соответствующее поле вычетов. Далее, если K – числовое поле, то V^K будет обозначать множество (классов эквивалентности) нормирований поля K, а V^K_∞ – подмножество (классов) архимедовых нормирований. Наконец, для поля K характеристики $\neq 2$ и произвольной пары ненулевых элементов $a, b \in K^\times$

обозначим через $D = \left(\frac{a,b}{K}\right)$ соответствующую алгебру кватернионов, т.е. четырехмерную K-алгебру с базисом 1, i, j, k и умножением, определенным следующим образом:

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad ij = k = -ji.$$

2. Мотивировки

В этом разделе мы опишем две мотивировки, которые естественным образом привели к рассмотрению вопросов в духе (†). Первая демонстрирует связь с теорией квадратичных форм, а вторая, наиболее важная для нас, вытекает из задач в дифференциальной геометрии.

Пусть K – поле характеристики $\neq 2$. Алгебре кватернионов $D = \left(\frac{a,b}{K}\right)$ поставим в соответствие квадратичную форму

$$q(x,y,z) = ax^2 + by^2 - abz^2.$$

Заметим, что с точностью до знака эта форма совпадает с приведенной нормой на пространстве чистых кватернионов, из чего следует, что для любого $d \in K^\times \setminus (K^\times)^2$ квадратичное расширение $K(\sqrt{d})/K$ вкладывается в D тогда и только тогда, когда q представляет d (см. [21; замечание 1.1.4]).

Теперь предположим, что даны две алгебры кватернионов с делением D_1 и D_2 с соответствующими квадратичными формами q_1 и q_2. Тогда эти алгебры имеют одинаковые максимальные подполя в том и только том случае, когда q_1 и q_2 представляют одинаковые элементы над K. С другой стороны, хорошо известно, что D_1 и D_2 являются K-изоморфными в точности тогда, когда q_1 и q_2 эквивалентны над K (см. [34; § 1.7, предложение]). Итак, (†) приводит нас к следующему естественному вопросу о квадратичных формах.

Предположим, что q_1 и q_2 – тернарные формы с определителем -1, которые представляют одни и те же элементы над K. Обязательно ли q_1 и q_2 эквивалентны над K?

Конечно, для общих квадратичных форм ответ отрицателен, но результаты из раздела 3 показывают, что для этих специальных форм в определенных ситуациях ответ может быть утвердительным.

Теперь мы перейдем к геометрическим задачам о локально симметрических пространствах с соизмеримыми длинами (замкнутых) геодезических, которые привели нас к вопросу (†). Один из подходов к изучению римановых многообразий состоит в том, что с точностью до изометрии или соизмеримости многообразие M должно в значительной степени определяться своим *спектром длин* $L(M)$, т.е. набором длин всех замкнутых геодезических. В самом простом случае, когда M_1 и M_2 являются двумерными евклидовыми сферами, замкнутые геодезические – это большие окружности, и очевидно, что они имеют одинаковые длины тогда и только тогда, когда M_1 и M_2 изометричны. Кроме того, применяя формулу следа, можно связать этот подход с задачей о том, когда два

изоспектральных римановых многообразия (т. е. многообразия, у которых спектры операторов Лапласа–Бельтрами совпадают) изометричны; неформально, это наиболее ярко выражено в вопросе Марка Каца [24] "*Можно ли услышать форму барабана*?"

Чтобы сделать наши рассуждения более конкретными и в то же время выявить связи с (†), рассмотрим, что происходит с римановыми поверхностями рода > 1 (детальное обсуждение этих вопросов для общих локально симметрических пространств можно найти в [36]). Пусть

$$\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

– верхняя полуплоскость со стандартной гиперболической метрикой $ds^2 = y^{-2}(dx^2+dy^2)$, снабженная обычным изометрическим действием группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ при помощи дробно-линейных преобразований. Пусть $\pi\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ – каноническая проекция. Напомним, что любая компактная риманова поверхность M рода > 1 может быть представлена как фактор $\mathbb{H}/\Gamma$, где $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ – дискретная подгруппа, содержащая $\{\pm 1\}$ и такая, что образ $\pi(\Gamma)$ не имеет кручения (см., например, [17; теорема 27.12]). Хорошо известно, что замкнутые геодезические в M соответствуют нетривиальным полупростым элементам $\gamma \in \Gamma$. Кроме того, поскольку группа $\pi(\Gamma)$ дискретна и не имеет кручения, любой полупростой элемент $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \pm 1$, автоматически является гиперболическим. Следовательно, $\pm\gamma$ сопряжен матрице вида

$$\begin{pmatrix} t_\gamma & 0 \\ 0 & t_\gamma^{-1} \end{pmatrix},$$

где t_γ – вещественное число, большее 1. Тогда длина соответствующей замкнутой геодезической c_γ в M может быть вычислена по формуле

$$\ell(c_\gamma) = \frac{2}{n_\gamma} \cdot \log t_\gamma, \tag{1}$$

где $n_\gamma \in \mathbb{Z}$ – индекс геодезической γ (см. более подробно [36; § 8]). Заметим, что, как следует из (1),

$$\mathbb{Q} \cdot L(M) = \mathbb{Q} \cdot \big\{\log |t_\gamma| \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{\pm 1\} \text{ – полупростой элемент}\big\}$$

(множество $\mathbb{Q} \cdot L(M)$ иногда называют *рациональным спектром длин* поверхности M). Для того чтобы проанализировать эту геометрическую ситуацию используя алгебраические и теоретико-числовые методы, рассматривается алгебра

$$D = \mathbb{Q}[\Gamma^{(2)}] \subset M_2(\mathbb{R}),$$

где $\Gamma^{(2)} \subset \Gamma$ – подгруппа, порожденная квадратами. Оказывается, что D – алгебра кватернионов с центром K, где K – *поле следов* группы Γ, т. е. поле, порожденное над $\mathbb{Q}$ следами $\mathrm{Tr}(\gamma)$ для всех $\gamma \in \Gamma^{(2)}$. Более того, нецентральный полупростой элемент $\gamma \in \Gamma^{(2)}$ определяет максимальную коммутативную

этальную подалгебру $K[\gamma]$ (см. [31; § 3.2]). Следует отметить, что алгебра D является важным инвариантом группы Γ; в частности, если Γ – арифметическая группа, то D – это в точности алгебра, участвующая в ее описании.

Пусть теперь $M_1 = \mathbb{H}/\Gamma_1$ и $M_2 = \mathbb{H}/\Gamma_2$ – две (компактные) римановы поверхности с соответствующими алгебрами кватернионов $D_i = \mathbb{Q}[\Gamma_i^{(2)}]$ и полями следов $K_i = Z(D_i)$, где $i = 1, 2$. Предположим, что M_1 и M_2 имеют *соизмеримые длины* геодезических (условие (L-C)), т. е.

$$\mathbb{Q} \cdot L(M_1) = \mathbb{Q} \cdot L(M_2).$$

Это влечет, что $K_1 = K_2 =: K$ (см. [36; теорема 2]).[1] Кроме того, как следует из (1), для любого нетривиального полупростого элемента $\gamma_1 \in \Gamma_1^{(2)}$ существует такой нетривиальный полупростой элемент $\gamma_2 \in \Gamma_2^{(2)}$, что

$$t_{\gamma_1}^m = t_{\gamma_2}^n$$

для некоторых целых чисел $m, n \geqslant 1$. Следовательно, матрицы γ_1^m и γ_2^n сопряжены в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, и мы имеем изоморфизм соответствующих этальных алгебр:

$$K[\gamma_1] = K[\gamma_1^m] \simeq K[\gamma_2^n] = K[\gamma_2].$$

Таким образом, геометрическое условие (L-C) преобразуется в алгебраическое условие: *D_1 и D_2 имеют одинаковые классы изоморфизма максимальных этальных подалгебр, пересекающих $\Gamma_1^{(2)}$ и $\Gamma_2^{(2)}$ соответственно.*

На самом деле хотелось бы доказать, что из (L-C) следует, что M_1 и M_2 *соизмеримы* (т. е. имеют общее конечнолистное накрытие или, эквивалентно, с точностью до сопряженности подгруппы Γ_1 и Γ_2 соизмеримы в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$). Если это так, то мы имеем $D_1 \simeq D_2$ (см. [31; следствие 3.3.5]). Итак, проблема соизмеримости римановых поверхностей приводит к следующему вопросу об алгебрах кватернионов.

Пусть D_1 и D_2 – две центральные алгебры кватернионов над полем K, и пусть $\Gamma_i \subset \mathrm{SL}(1, D_i)$, $i = 1, 2$, – плотные по Зарискому подгруппы с полем следов K. Допустим, что D_1 и D_2 имеют одинаковые классы изоморфизма максимальных этальных подалгебр, пересекающих Γ_1 и Γ_2 соответственно. Являются ли D_1 и D_2 изоморфными?

Это более тонкий вариант нашего исходного вопроса (†). Если K – числовое поле, то, как мы уже упоминали, два тела кватернионов, имеющих одинаковые максимальные подполя, изоморфны (см. более подробно в разделе 3). Этот факт был использован А. Ридом [41] для того, чтобы показать, что любые две *арифметически определенные* римановы поверхности с одинаковым спектром длин геодезических (т. е. M_1 и M_2 такие, что $L(M_1) = L(M_2)$) соизмеримы. Общий случай, скорее всего, зависит от ответов на вопросы, сформулированные выше.

[1] На самом деле равенство полей следов доказывается исходя из предположения о *слабой соизмеримости* Γ_1 и Γ_2, которое в свою очередь связано с соизмеримостью длин замкнутых геодезических соответствующих римановых поверхностей.

Мы хотели бы завершить наше обсуждение двумя замечаниями. Во-первых, надо отметить, что если подгруппа Γ неарифметична, то она не определяется однозначно соответствующей алгеброй кватернионов (в действительности, можно построить бесконечное семейство несоизмеримых кокомпактных решеток, имеющих одну и ту же кватернионную алгебру, см. [48]), поэтому из утвердительного ответа на наш вопрос об алгебрах не будет непосредственно следовать результат для римановых поверхностей. Во-вторых, помимо точного (количественного) варианта сформулированного выше вопроса можно рассмотреть его качественную версию: всегда ли множество классов изоморфизма алгебр с делением, имеющих одинаковые максимальные подполя, конечно? Отметим, что подобные результаты о конечности действительно имеются даже для неарифметических римановых поверхностей. Например, известно, что каждый класс изоспектральных компактных римановых поверхностей распадается в объединение конечного числа классов изометрических поверхностей. Напомним, что, согласно известной гипотезе, каждый класс изоспектральных поверхностей должен состоять из *одного* класса соизмеримости.

3. Род алгебры с делением

В этом разделе мы дадим обзор имеющихся результатов по вопросам 1 и 2 из раздела 1 о роде алгебры с делением.

Начнем с нескольких замечаний к вопросу 1. Во-первых, отметим, что род D может быть тривиальным только в том случае, когда класс $[D]$ имеет порядок 2 в группе Брауэра. Действительно, противоположная алгебра D^{op} имеет те же максимальные подполя, что и D. Из этого следует, что если $|\mathbf{gen}(D)| = 1$, то $D \simeq D^{\mathrm{op}}$ (что эквивалентно тому, что $[D]$ имеет порядок 2). В то же время, как показывает пример кубической алгебры над числовым полем, приведенный в разделе 1, род заведомо может быть больше, чем $\{[D], [D^{\mathrm{op}}]\}$. Другой такой пример можно построить следующим образом. Пусть Δ_1 и Δ_2 – центральные алгебры с делением над полем K, имеющие взаимно простые нечетные степени. Рассмотрим алгебры с делением

$$D_1 = \Delta_1 \otimes_K \Delta_2 \quad \text{и} \quad D_2 = \Delta_1 \otimes_K \Delta_2^{\mathrm{op}}.$$

Тогда D_2 не изоморфна ни D_1, ни D_1^{op}, но D_1 и D_2 имеют одни и те же поля разложения. Действительно, поскольку степени Δ_1 и Δ_2 взаимно просты, расширение расщепляет D_1 тогда и только тогда, когда оно расщепляет Δ_1 и Δ_2; тогда оно также расщепляет Δ_2^{op} и, следовательно, D_2 (и обратно). Итак, D_1 и D_2 имеют одинаковые максимальные подполя, и поэтому $[D_2] \in \mathbf{gen}(D_1)$. Обратим внимание, что этот пример вытекает из следующего общего факта: если D – центральная алгебра с делением степени n над полем K, то для любого целого m, взаимно простого с n, класс $[D^{\otimes m}] = m[D] \in \mathrm{Br}(K)$ представим центральной алгеброй с делением D_m степени n, которая имеет те же максимальные подполя, что и D (см. [40; лемма 3.6]).

Как мы уже отмечали, теорема Альберта–Брауэра–Хассе–Нётер (ABHN) позволяет полностью ответить на вопросы 1 и 2 в случае, когда K – числовое поле. Точное утверждение выглядит следующим образом.

Предложение 3.1. *Предположим, что K – числовое поле и D – конечномерная центральная алгебра с делением над K.*

(a) *Если $[D] \in \mathrm{Br}(K)$ имеет порядок 2 (в этом случае D – алгебра кватернионов), то $|\mathbf{gen}(D)| = 1$.*

(b) *Род $\mathbf{gen}(D)$ является конечным множеством для всех D.*

Напомним, что из (ABHN) мы имеем инъективный гомоморфизм

$$0 \to \mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v \in V^K} \mathrm{Br}(K_v),$$

где для каждого $v \in V^K$

$$\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(K_v), \qquad [D] \mapsto [D \otimes_K K_v]$$

– естественное отображение. Будем говорить, что конечномерная центральная алгебра с делением D над числовым полем K (или ее класс $[D] \in \mathrm{Br}(K)$) *неразветвлена* в $v \in V^K$, если ее образ в $\mathrm{Br}(K_v)$ тривиален, и *разветвлена* в противном случае. Заметим, что это определение согласуется с понятием ветвления над произвольными полями (см. раздел 4 и, в частности, пример 4.1). Конечное множество нормирований, в которых D разветвлено, будем обозначать через $R(D)$.

Набросок доказательства предложения 3.1. (a) Сначала отметим, что алгебра с делением D над K экспоненты 2 является алгеброй кватернионов в силу того, что над числовыми полями степень алгебры с делением и ее экспонента совпадают, что следует из теоремы Грюнвальда–Ванга (см., например, [33; гл. VIII, § 2]). Далее, рассмотрим 2-кручение в (ABHN):

$$0 \to {}_2\mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v \in V^K} {}_2\mathrm{Br}(K_v).$$

Так как ${}_2\mathrm{Br}(K_v)$ изоморфна либо $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, либо 0 для всех $v \in V^K$, мы видим, что алгебра D степени 2 над K однозначно, с точностью до изоморфизма, определяется своим ветвлением $R(D)$. Следовательно, чтобы доказать равенство $|\mathbf{gen}(D)| = 1$, достаточно показать, что если две алгебры кватернионов с делением D_1 и D_2 имеют общие максимальные подполя, то $R(D_1) = R(D_2)$. Это легко следует из слабой аппроксимации и хорошо известного критерия, который утверждает, что для $d \in K^\times \setminus (K^\times)^2$

$$L = K(\sqrt{d}\,) \text{ обладает вложением в } D \;\Leftrightarrow\; d \notin (K_v^\times)^2 \text{ для всех } v \in R(D) \qquad (2)$$

(см. [34; § 18.4, следствие b]). Действительно, предположим, что существует $v_0 \in R(D_1) \setminus R(D_2)$. Используя открытость $(K_v^\times)^2 \subset K_v^\times$ и слабую аппрокси-

мацию, можно найти такой $d \in K^\times \setminus (K^\times)^2$, что

$$d \in (K_{v_0}^\times)^2, \quad \text{но} \quad d \notin (K_v^\times)^2 \text{ для всех } v \in R(D_2).$$

Тогда, согласно (2), квадратичное расширение $L = K(\sqrt{d}\,)$ обладает вложением в D_2, но не может быть вложено в D_1 – противоречие.

(b) Пусть D – алгебра с делением над K степени $n > 2$. Рассмотрим n-кручение в (ABHN):

$$0 \to {}_n\mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v \in V^K} {}_n\mathrm{Br}(K_v).$$

Для того чтобы установить конечность $\mathbf{gen}(D)$, сначала отметим, что из $D' \in \mathbf{gen}(D)$ следует равенство $R(D') = R(D)$ (см. [34; § 18.4, следствие b]; на самом деле это верно не только над числовыми полями – см. лемму 4.2 ниже). Так как ${}_n\mathrm{Br}(K_v)$ – это $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ или 0 для всех $v \in V^K$ (см. пример 4.1, (a) ниже), мы имеем

$$|\mathbf{gen}(D)| \leqslant \left| \bigoplus_{v \in R(D)} {}_n\mathrm{Br}(K_v) \right| \leqslant n^r, \tag{3}$$

где $r = |R(D)|$.

Для иллюстрации рассуждений, приведенных в доказательстве утверждения (a), рассмотрим следующий пример.

Пример 3.2. Пусть

$$D_1 = \left(\frac{-1,3}{\mathbb{Q}}\right) \quad \text{и} \quad D_2 = \left(\frac{-1,7}{\mathbb{Q}}\right).$$

Можно проверить, что $R(D_1) = \{2,3\}$ и $R(D_2) = \{2,7\}$, следовательно, D_1 и D_2 – неизоморфные тела кватернионов над $\mathbb{Q}$. Очевидно, что $10 \in (\mathbb{Q}_3^\times)^2$, но $10 \notin (\mathbb{Q}_2^\times)^2$, $(\mathbb{Q}_7^\times)^2$. Таким образом, согласно (2) поле $L = \mathbb{Q}(\sqrt{10}\,)$ может быть вложено в D_2, но не в D_1. Другими словами, D_1 и D_2 различаются своими квадратичными подполями. Мы хотели бы отметить, что в недавнем препринте [30] найдена эффективная оценка дискриминанта квадратичного поля, которое различает два данных несовпадающих тела кватернионов [30; теорема 1.3].

Теперь естественно спросить, переносятся ли (и в какой мере) полученные результаты про род на более общие поля. А именно, можно ли ожидать, что род всегда *тривиален* для алгебры кватернионов с делением и *конечен* для любой конечномерной алгебры с делением над *произвольным* полем K? Оказывается, что в обоих случаях ответ *отрицателен*. Конструкция алгебр кватернионов с нетривиальным родом над некоторыми очень большими полями была предложена М. Ростом, М. Шахером, А. Вадсвортом и др. За детальным описанием конструкции мы отсылаем читателя к [20; § 2], а здесь только наметим основные идеи.

Пусть D_1 и D_2 – две неизоморфные алгебры кватернионов с делением над полем k характеристики $\neq 2$, содержащие фиксированное квадратичное расширение k. Например, можно взять $k = \mathbb{Q}$ и рассмотреть алгебры кватернионов D_1 и D_2 из примера 3.2. Если D_1 и D_2 уже имеют общие квадратичные подполя, то все доказано. Если нет, то существует квадратичное расширение $k(\sqrt{d}\,)$, которое может быть вложено в D_1, но не в D_2. Применяя стандартные результаты о квадратичных формах к норменным формам D_1 и D_2, можно показать, что существует такое расширение $k^{(1)}$ поля k (являющееся полем рациональных функций на некоторой k-определенной квадрике), что

- $D_1 \otimes_k k^{(1)}$ и $D_2 \otimes_k k^{(1)}$ – неизоморфные алгебры с делением над $k^{(1)}$, **но**
- $k^{(1)}(\sqrt{d}\,)$ обладает вложением в $D_2 \otimes_k k^{(1)}$.

С оставшимися подполями мы разбираемся последовательно, применяя ту же процедуру к алгебрам, полученным из D_1 и D_2 путем расширения скаляров, выполненного на предыдущем шаге. Этот процесс порождает возрастающую цепочку полей

$$k^{(1)} \subset k^{(2)} \subset k^{(3)} \subset \cdots,$$

и мы берем в качестве K объединение (прямой предел) этой цепочки. Тогда $D_1 \otimes_k K$ и $D_2 \otimes_k K$ оказываются неизоморфными телами кватернионов над K с одинаковыми максимальными подполями; в частности, $|\mathbf{gen}(D_1 \otimes_k K)| > 1$. Заметим, что полученное поле K имеет бесконечную степень трансцендентности над k и, в частности, является *бесконечно порожденным*. Более того, применяя некоторую модификацию данной конструкции (см. [32]) к бесконечному набору попарно неизоморфных тел кватернионов $D_1, D_2, D_3, \ldots$ над полем k характеристики $\neq 2$, содержащих фиксированное квадратичное расширение (например, возьмем $k = \mathbb{Q}$ и рассмотрим семейство алгебр вида $\left(\dfrac{-1, p}{\mathbb{Q}}\right)$, где p – простое число $\equiv 3 \pmod 4$), можно построить такое бесконечно порожденное расширение K/k, что алгебры $D_i \otimes_k K$ остаются попарно неизоморфными телами кватернионов, причем любые две из них имеют одинаковые квадратичные подполя. В частности, это дает пример тела кватернионов, имеющего *бесконечный* род. Совсем недавно аналогичный подход был использован в [47], чтобы показать, что для любого простого p существуют такие поле K и центральная алгебра с делением D над K степени p, что $\mathbf{gen}(D)$ бесконечен.

Таким образом, в то время как над числовыми и, более общо, глобальными полями вопросы 1 и 2 получают исчерпывающий ответ, над произвольными полями они оказываются весьма нетривиальными. На самом деле до недавнего времени практически ничего не было известно о ситуации над полями, отличными от глобальных. Как мы уже упоминали в разделе 2, тривиальность рода для тел кватернионов D над числовыми полями имеет следствия для арифметически определенных римановых поверхностей. В связи с исследованием локально симметрических пространств с соизмеримыми длинами геодезических [36] Г. Прасад и второй из авторов настоящей статьи задали вопрос, всегда

ли $|\mathbf{gen}(D)| = 1$ для любого центрального тела кватернионов над $K = \mathbb{Q}(x)$.[2] Утвердительный ответ был дан Д. Солтманом, а позже в совместной работе Д. Солтман и С. Гарибальди показали, что любое тело кватернионов над $k(x)$, где k – произвольное числовое поле, имеет тривиальный род (на самом деле ими был рассмотрен более общий случай так называемых *прозрачных* (transparent) полей характеристики $\neq 2$ – см. [20]). Мотивированные этим результатом, мы показали в [40], что тривиальность рода произвольных тел кватернионов над данным полем k характеристики $\neq 2$ является свойством, которое стабильно при чисто трансцендентных расширениях. Впоследствии мы установили аналогичную *теорему стабильности* для произвольных алгебр экспоненты 2. Точные формулировки выглядят следующим образом.

Теорема 3.3 (см. [40; теорема A] и [5; теорема 3.5]). *Пусть k – поле характеристики $\neq 2$.*

(a) *Если $|\mathbf{gen}(D)| = 1$ для любого тела кватернионов D над k, то*

$$|\mathbf{gen}(D')| = 1$$

для любого тела кватернионов D' над полем рациональных функций $k(x)$.

(b) *Если $|\mathbf{gen}(D)| = 1$ для любой центральной k-алгебры с делением экспоненты 2, то это свойство справедливо для любой центральной алгебры с делением экспоненты 2 над $k(x)$.*

В качестве непосредственного следствия мы получаем такое утверждение.

Следствие 3.4. *Если k – числовое или конечное поле характеристики $\neq 2$ и $K = k(x_1, \ldots, x_r)$ – его чисто трансцендентное расширение, то для любой центральной K-алгебры с делением D экспоненты 2 выполнено равенство $|\mathbf{gen}(D)| = 1$.*

Замечание 3.5. В [26] теорема стабильности была обобщена на поля функций многообразий Севери–Брауэра алгебр нечетной степени.

Обратимся теперь к вопросу 2. Выше мы видели, что невозможно рассчитывать на получение результата о конечности для рода над произвольными полями. Тем не менее мы доказали следующее утверждение о конечности над конечно порожденными полями.

Теорема 3.6 [4; теорема 3]. *Пусть K – конечно порожденное поле. Если D – центральная K-алгебра с делением степени, взаимно простой с $\operatorname{char} K$, то $\mathbf{gen}(D)$ – конечное множество.*

Замечание 3.7. (a) Остается открытым вопрос, существуют ли тела кватернионов над конечно порожденными полями с *нетривиальным* родом.

(b) В [27] Д. Крашен и К. Маккини изучали алгебры с делением, имеющие одинаковые конечномерные *поля разложений* (соответствующее понятие рода обсуждается в разделе 5).

[2] Хотя вопросы такого рода обсуждались по крайней мере начиная с работы Ш. Амицура [2] (см. раздел 1), тем не менее, насколько нам известно, это было первой "официальной" постановкой; сам термин *род* был введен позже.

4. Ветвление алгебр с делением

В этом разделе мы опишем некоторые идеи, задействованные в доказательствах теорем 3.3 и 3.6. По большому счету, наши рассуждения во многом опираются на те же общие соображения, которые мы уже обсуждали в случае числовых полей. Точнее, несмотря на отсутствие прямого аналога (ABHN) для произвольных (конечно порожденных) полей, анализ *ветвлений* алгебр с делением опять играет ключевую роль.

Для начала напомним стандартные факты, которые используются в анализе ветвлений алгебр с делением. Пусть K – поле с дискретным нормированием v. Обозначим через $\mathscr{G}^{(v)} = \mathrm{Gal}(\overline{K}_v^{\mathrm{sep}}/\overline{K}_v)$ абсолютную группу Галуа поля вычетов $\overline{K}_v$ пополнения K_v и зафиксируем целое $n > 1$. Если n и $\mathrm{char}\,\overline{K}_v$ взаимно просты или $\overline{K}_v$ совершенно, то существует *отображение вычета*

$$r_v\colon {}_n\mathrm{Br}(K_v) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{G}^{(v)}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \tag{4}$$

где группа справа является группой *непрерывных* характеров группы $\mathscr{G}^{(v)}$ по модулю n (см. [43; § 10]). Кроме того, известно, что r_v сюръективно. Алгебра с делением D над K_v экспоненты n (или соответствующий класс $[D] \in {}_n\mathrm{Br}(K_v)$) называется *неразветвленной*, если $r_v([D]) = 0$, а *неразветвленная группа Брауэра поля* K_v определяется как

$${}_n\mathrm{Br}(K_v)_{\{v\}} = \ker r_v.$$

Таким образом, по построению, мы имеем точную последовательность

$$0 \to {}_n\mathrm{Br}(K_v)_{\{v\}} \to {}_n\mathrm{Br}(K_v) \xrightarrow{r_v} \mathrm{Hom}(\mathscr{G}^{(v)}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0. \tag{5}$$

Можно показать, что существует изоморфизм ${}_n\mathrm{Br}(K_v)_{\{v\}} \simeq {}_n\mathrm{Br}(\overline{K}_v)$ и, более того, последняя группа естественно отождествляется с ${}_n\mathrm{Br}(\mathscr{O}_v)$, где $\mathscr{O}_v$ – кольцо нормирования K_v (см. [51; теорема 3.2 и последующие рассуждения]). Другими словами, неразветвленные относительно v алгебры – это в точности те, которые возникают из *алгебр Азумая* над $\mathscr{O}_v$.

Далее, используя композицию отображения (4) и естественного гомоморфизма ${}_n\mathrm{Br}(K) \to {}_n\,\mathrm{Br}(K_v)$, получаем отображение вычета

$$\rho_v\colon {}_n\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{G}^{(v)}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \tag{6}$$

и снова мы говорим, что алгебра с делением D над K *неразветвлена* относительно v, если $\rho_v([D]) = 0$. В случае полей, отличных от локальных, для получения информации о ${}_n\mathrm{Br}(K)$, как правило, используется не индивидуальное нормирование K, а подходящий набор нормирований. Для этой цели удобно дать следующее определение. Зафиксируем целое число $n > 1$ и обозначим через V множество таких дискретных нормирований поля K, что отображение вычета ρ_v определено для всех $v \in V$. Тогда *n-кручение неразветвленной группы Брауэра относительно* V определяется следующим образом:

$${}_n\mathrm{Br}(K)_V = \bigcap_{v \in V} \ker \rho_v.$$

Пример 4.1. (a) Пусть p – простое число, $K = \mathbb{Q}_p$ и $v = v_p$ – соответствующее p-адическое нормирование. Тогда, поскольку поле $\mathbb{F}_p$ из p элементов совершенно и $\mathrm{Br}(\mathbb{F}_p) = \{0\}$, из (5) следует, что для любого $n > 1$ существует изоморфизм

$$ {}_n\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) \overset{r_v}{\simeq} \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. $$

Переходя к пределу по всем n, мы получаем изоморфизм $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, который совпадает с инвариантом из локальной теории полей классов. Это описание группы Брауэра распространяется на любое конечное расширение $\mathbb{Q}_p$. Важным моментом здесь является то, что только тривиальная алгебра над таким полем является неразветвленной (относительно естественного нормирования).

(b) Пусть K – числовое поле. Из (a) следует, что конечномерная центральная алгебра с делением D над K является неразветвленной относительно неархимедова нормирования $v \in V^K$ тогда и только тогда, когда ее образ в $\mathrm{Br}(K_v)$ тривиален (что согласуется с определением, которое мы использовали в разделе 3). Используя теперь точность (ABHN), мы видим, что если $S \subset V^K$ – конечное множество, содержащее V^K_∞, то для $V = V^K \setminus S$ и любого целого $n > 1$ неразветвленная группа Брауэра ${}_n\mathrm{Br}(K)_V$ конечна.

(c) Пусть C – гладкая связная проективная кривая над полем k и $K = k(C)$ – поле функций на C. Каждой замкнутой точке $P \in C$ на K отвечает дискретное нормирование v_P поля K. Множество дискретных нормирований

$$ V_0 = \{v_P \mid P \in C \text{ – замкнутая точка}\} $$

обычно называют множеством *геометрических плейсов* K (отметим, что это в точности дискретные нормирования K, которые тривиальны на k). Если $n > 1$ – целое, взаимно простое с $\mathrm{char}\, k$, то для каждого $v_P \in V_0$ имеется отображение вычета, ассоциированное с точкой P:

$$ \rho_P = \rho_{v_P} \colon {}_n\mathrm{Br}(K) \to H^1(G_P, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), $$

где G_P – абсолютная группа Галуа поля вычетов точки P. В этом случае соответствующую неразветвленную группу Брауэра ${}_n\mathrm{Br}(K)_{V_0}$, следуя традиции, будем обозначать через ${}_n\mathrm{Br}(K)_{\mathrm{ur}}$. Кроме того, если k – совершенное поле и C геометрически связна, то определенное выше отображение вычета ρ_P можно продолжить до отображения $\mathrm{Br}(K) \to H^1(G_P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, определенного на всей группе Брауэра $\mathrm{Br}(K)$. В этом случае мы можем рассмотреть отображение

$$ \mathrm{Br}(K) \xrightarrow{\bigoplus \rho_P} \bigoplus_{P \in C_0} H^1(G_P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), $$

где C_0 – множество замкнутых точек кривой C. Известно, что его ядро

$$ \ker\Big(\bigoplus \rho_P\Big) =: \mathrm{Br}(K)_{\mathrm{ur}} $$

совпадает с группой Брауэра $\mathrm{Br}(C)$ кривой C, определенной либо в терминах алгебр Азумая, либо в терминах этальных когомологий (см. [21; § 6.4] и [29]).

Таким образом, группа ${}_n\mathrm{Br}(K)_{\mathrm{ur}}$ совпадает с подгруппой n-кручения группы $\mathrm{Br}(C)$.

Возвращаясь к общей ситуации, мы сейчас сформулируем результат, который описывает ветвление алгебр с делением из одного рода. Пусть K – поле с дискретным нормированием v, и пусть $n > 1$ – целое число, взаимно простое с характеристикой поля вычетов $\overline{K}_v$. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Пусть D и D' – центральные K-алгебры с делением такие, что*

$$[D] \in {}_n\mathrm{Br}(K) \quad \text{и} \quad [D'] \in \mathbf{gen}(D) \cap {}_n\mathrm{Br}(K).$$

Обозначим через χ_v и χ'_v образы D и D' в $\mathrm{Hom}(\mathscr{G}^{(v)}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ при отображении вычета ρ_v. Тогда

$$\ker \chi_v = \ker \chi'_v.$$

В частности, D неразветвлено относительно v в том и только том случае, когда этим свойством обладает D'.

Прежде чем доказывать лемму, напомним, что если поле $\mathscr{K}$ является полным относительно дискретного нормирования v и $\mathscr{D}$ – конечномерная центральная алгебра с делением над $\mathscr{K}$, то v можно однозначно продолжить до дискретного нормирования $\widetilde{v}$ тела $\mathscr{D}$ (см. [45; гл. XII, § 2], [51]). Далее, соответствующее кольцо нормирования $\mathscr{O}_{\mathscr{D}}$ имеет единственный максимальный 2-сторонний идеал $\mathfrak{P}_{\mathscr{D}}$ (идеал нормирования), и факторкольцо $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{O}_{\mathscr{D}}/\mathfrak{P}_{\mathscr{D}}$ является конечномерной алгеброй с делением над полем вычетов $\overline{\mathscr{K}}$ (не обязательно центральной), называемой *алгеброй вычетов*.

Доказательство (набросок). Пусть

$$D \otimes_K K_v = M_\ell(\mathscr{D}) \quad \text{и} \quad D' \otimes_K K_v = M_{\ell'}(\mathscr{D}'),$$

где $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ – центральные алгебры с делением над K_v. Вначале показывается, что $\ell = \ell'$, а $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ имеют одинаковые максимальные подполя [40; следствие 2.4]. Затем проверяется, что центры $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ алгебр вычетов $\overline{\mathscr{D}}$ и $\overline{\mathscr{D}}'$ совпадают [5; лемма 2.3]. Наконец, используя тот факт, что $\ker \chi_v$ и $\ker \chi'_v$ являются в точности подгруппами группы $\mathscr{G}^{(v)}$, соответствующими $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ (см. [51; теорема 3.5]), мы заключаем, что

$$\ker \chi_v = \ker \chi'_v,$$

как и требовалось.

Теперь мы можем дать набросок доказательства части (a) теоремы 3.3 (см. подробности в доказательстве теоремы A в [40]). Пусть k – такое поле характеристики $\neq 2$, что $|\mathbf{gen}(D)| = 1$ для каждой алгебры кватернионов с делением D над k. Отождествим $k(x)$ с полем рациональных функций на проективной прямой $\mathbb{P}^1_k$ и рассмотрим следующий фрагмент *точной последовательности Фаддеева* (см. [21; следствие 6.4.6]):

$$0 \to {}_2\mathrm{Br}(k) \to {}_2\mathrm{Br}(k(x)) \xrightarrow{\bigoplus \rho_P} \bigoplus_{P \in (\mathbb{P}^1_k)_0} H^1(G_P, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}). \tag{7}$$

Предположим, что D и D' – алгебры кватернионов с делением над $k(x)$, имеющие общие максимальные подполя. Учитывая, что $[D]$ и $[D']$ имеют экспоненту 2 в $\mathrm{Br}(k(x))$, мы получаем из леммы 4.2, что

$$\rho_P([D]) = \rho_P([D'])$$

для всех $P \in (\mathbb{P}^1_k)_0$. Следовательно, из (7) получаем, что

$$[D] = [D'] \cdot [\Delta \otimes_k k(x)]$$

для некоторой центральной алгебры кватернионов Δ над k (см. [40; следствие 4.2]). С помощью процедуры специализации, используя предположение о том, что тела кватернионов над k имеют тривиальный род, показывается, что $[\Delta] = 0$, и, значит, $D \simeq D'$. Таким образом, $|\mathbf{gen}(D)| = 1$, что и требовалось.

Сейчас мы опишем основные шаги доказательства теоремы 3.6, которое также опирается на анализ ветвления. Пусть K – конечно порожденное поле. Зафиксируем целое $n > 1$, взаимно простое с $\mathrm{char}\, K$. Рассмотрим множество V дискретных нормирований поля K, обладающее следующими двумя свойствами:

(I) *для любого* $a \in K^\times$ *множество* $V(a) := \{v \in V \mid v(a) \neq 0\}$ *конечно*;

(II) *для любого* $v \in V$ *характеристика поля вычетов* $\overline{K}_v$ *взаимно проста с* n.

Заметим, что (II) обеспечивает существование отображения вычета

$${}_n\mathrm{Br}(K) \xrightarrow{\rho_v} \mathrm{Hom}(\mathscr{G}^{(v)}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

для каждого $v \in V$. При рассмотрении случая числовых полей в разделе 3 мы заметили, что множество разветвленных нормирований конечно для любой алгебры с делением D, и это, с помощью (ABHN), привело к оценке (3) размера $\mathbf{gen}(D)$. Над общими полями условие (I) снова гарантирует конечность множества

$$R(D) = R(D, V) = \{v \in V \mid \rho_v([D]) \neq 0\}$$

разветвленных нормирований для любой алгебры с делением D степени n над K (см. несколько более общее утверждение в [5; предложение 2.1]). Для получения аналога оценки (3) мы рассуждаем следующим образом, используя лемму 4.2. Предположим, что D – центральная алгебра с делением над K степени n и $[D'] \in \mathbf{gen}(D)$. Для $v \in V$ положим

$$\chi_v = \rho_v([D]) \quad \text{и} \quad \chi'_v = \rho_v([D']);$$

напомним, что по лемме 4.2 имеем $\ker \chi_v = \ker \chi'_v$. Отметим, что если характер χ_v имеет порядок $m \mid n$, то любой характер χ'_v группы $\mathscr{G}^{(v)}$ с тем же ядром можно рассматривать как точный характер циклической группы $\mathscr{G}^{(v)}/\ker \chi_v$ порядка m. Следовательно, существует $\varphi(m)$ возможностей для χ', и поэтому

$$|\rho_v(\mathbf{gen}(D))| \leqslant \varphi(m) \leqslant \varphi(n) \tag{8}$$

для любого $v \in V$ (поскольку m делит n), и

$$\rho_v(\mathbf{gen}(D)) = \{1\},$$

если $\rho_v([D]) = 1$. Пусть $\rho = (\rho_v)_{v\in V}$ – прямая сумма отображений вычета для всех $v \in V$. Тогда

$$|\rho(\mathbf{gen}(D))| \leqslant \varphi(n)^r, \tag{9}$$

где $r = |R(D)|$. Следовательно, если $\ker\rho = {}_n\mathrm{Br}(K)_V$ конечно, мы получим оценку

$$|\mathbf{gen}(D)| \leqslant \varphi(n)^r \cdot |{}_n\mathrm{Br}(K)_V|. \tag{10}$$

Таким образом, доказательство теоремы 3.6 сводится к установлению конечности неразветвленной группы Брауэра относительно подходящего множества дискретных нормирований, что является предметом следующего утверждения.

Теорема 4.3 [4; теорема 8]. *Пусть K – конечно порожденное поле, и пусть $n > 1$ – целое число, взаимно простое с* $\mathrm{char}\, K$. *Тогда существует набор V дискретных нормирований K, удовлетворяющий введенным выше условиям* (I) *и* (II), *для которого ${}_n\mathrm{Br}(K)_V$ конечна.*

Наше доказательство этой теоремы, набросок которого будет дан ниже, опиралось на анализ точной последовательности для группы Брауэра кривой. Впоследствии Ж.-Л. Кольё-Телен указал нам, что утверждение о конечности можно вывести из результатов об этальных когомологиях. Более подробно, в этом доказательстве поле K представляется в виде поля рациональных функций на гладкой арифметической схеме X, на которой n обратимо. Затем используется теорема конечности Делиня для этальных когомологий конструктивных пучков (теорема 1.1 в главе “Théorèmes de finitude” в [13]), которая показывает, что в этом случае n-кручение этальной группы Брауэра конечно. С другой стороны, по теореме Габбера о чистоте (purity theorem; доказательство можно найти в [18], а история вопроса описана в [10; с. 153] и [9; обсуждение после теоремы 4.2]) последняя группа совпадает с неразветвленной группой Брауэра поля K относительно множества V дискретных нормирований K, ассоциированных с простыми дивизорами в X (см. более подробно в [4]). Будем называть такое множество нормирований *дивизориальным*. Заметим, что это рассуждение дает определенную свободу в выборе V: например, X может быть заменено на открытую подсхему, что позволяет удалить из V любое *конечное* множество. Это обстоятельство дает возможность несколько упростить доказательство конечности рода. Действительно, для данной алгебры с делением D мы можем выбрать такое множество V, что D будет неразветвленной относительно всех нормирований из V. Тогда из леммы 4.2 нам нужен только тот факт, что любой класс $[D'] \in \mathbf{gen}(D)$ является неразветвленным относительно всех нормирований $v \in V$ (для произвольных алгебраических групп см. теорему 6.7). Из этого сразу следует, что

$$|\mathbf{gen}(D)| \leqslant |{}_n\mathrm{Br}(K)_V| < \infty.$$

Основным недостатком здесь является то, что это рассуждение не дает *явных* оценок порядка рода.

С другой стороны, наше первоначальное доказательство теоремы 4.3, в принципе, позволяет получить явные оценки порядка $\mathbf{gen}(D)$ в определенных случаях. Здесь мы только опишем основные идеи, отсылая за деталями к [6]. Для

простоты предположим, что K – конечно порожденное поле характеристики 0. Тогда K может быть реализовано как поле функций $k(C)$ гладкой проективной геометрически неприводимой кривой C над полем k, которое является чисто трансцендентным расширением числового поля P. Пусть V_0 – множество геометрических плейсов поля K. Хорошо известно (см., например, [29]), что геометрическая группа Брауэра $\mathrm{Br}(K)_{\mathrm{ur}} = \mathrm{Br}(K)_{V_0}$ включается в точную последовательность

$$\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\iota_k} \mathrm{Br}(k(C))_{\mathrm{ur}} \xrightarrow{\omega} H^1(k, J)/\Phi(C, k), \tag{11}$$

где ι_k – естественное отображение, J – якобиан кривой C и $\Phi(C, k)$ – некоторая конечная циклическая подгруппа в $H^1(k, J)$ (при этом, если $C(k) \neq \varnothing$, то $\Phi(C, k) = 0$ и последовательность (11) расщепляется). В качестве требуемого множества V дискретных нормирований K возьмем объединение V_0 с множеством V_1 продолжений на K подходящего множества нормирований поля k (если k – числовое поле, то V_1 состоит из продолжений на K почти всех неархимедовых нормирований поля k). Тогда ${}_n\mathrm{Br}(K)_V \subset {}_n\mathrm{Br}(K)_{\mathrm{ur}}$ и доказательство теоремы 4.3 сводится к проверке конечности $\iota_k^{-1}({}_n\mathrm{Br}(K)_V)$ и $\omega({}_n\mathrm{Br}(K)_V)$.

Доказательство конечности $\iota_k^{-1}({}_n\mathrm{Br}(K)_V)$ использует свойства нашей реализации K в виде $k(C)$, точную последовательность Фаддеева, связывающую группы Брауэра полей k и P, и (ABHN). Наше доказательство конечности $\omega({}_n\mathrm{Br}(K)_V)$ напоминает доказательство слабой теоремы Морделла–Вейля и заключается в анализе неразветвленных классов когомологий. Обратим внимание, что некоторые модификации этого рассуждения позволяют показать, что из построенного множества V можно удалить любое конечное подмножество, не нарушая конечности ${}_n\mathrm{Br}(K)_V$.

В завершение этого раздела мы приведем в качестве иллюстрации набросок доказательства теоремы 4.3 в случае, когда K – поле функций эллиптической кривой над числовым полем и $n = 2$ (см. [5; § 4]). Рассматривается следующая ситуация. Пусть k – числовое поле и E – эллиптическая кривая над k, заданная уравнением Вейерштрасса

$$y^2 = f(x), \quad \text{где} \quad f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma. \tag{12}$$

Обозначим дискриминант f через $\delta \neq 0$. Будем предполагать, что 2-кручение эллиптической кривой E рационально над k, т. е. многочлен f имеет в k три (различных) корня:

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c).$$

Пусть

$$K := k(E) = k(x, y)$$

– поле функций на E. Поскольку $E(k) \neq \varnothing$ и E совпадает со своим якобианом, последовательность (11) приводит к следующей точной последовательности:

$$0 \to {}_2\mathrm{Br}(k) \to {}_2\mathrm{Br}(K)_{\mathrm{ur}} \xrightarrow{\omega} {}_2H^1(k, E) \to 0. \tag{13}$$

Эта последовательность расщепляется, и сечение для ω строится следующим образом. Последовательность Куммера

$$0 \to E[2] \to E \xrightarrow{\times 2} E \to 0$$

порождает точную последовательность когомологий

$$0 \to E(k)/2E(k) \to H^1(k, E[2]) \xrightarrow{\sigma} {}_2H^1(k, E) \to 0. \tag{14}$$

Поскольку $E[2]$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ изоморфны как модули над группой Галуа, мы имеем

$$H^1(k, E[2]) \simeq k^\times/(k^\times)^2 \times k^\times/(k^\times)^2.$$

Рассмотрим отображение

$$\nu\colon H^1(k, E[2]) \to {}_2\mathrm{Br}(k(E))_{\mathrm{ur}}, \qquad (r, s) \mapsto \left[\left(\frac{r, x-b}{K}\right) \otimes_K \left(\frac{s, x-c}{K}\right)\right].$$

Можно проверить, что $\omega \circ \nu = \sigma$ и $\nu(\ker \sigma) = 0$, откуда и получается требуемое сечение

$$\varepsilon\colon {}_2H^1(k, E) \to {}_2\mathrm{Br}(k(E))_{\mathrm{ur}}.$$

Это приводит к следующему описанию группы Брауэра, которое справедливо над любым полем k характеристики $\neq 2, 3$.

Теорема 4.4 [3; теорема 3.6]. *Предположим, что 2-кручение эллиптической кривой E, заданной уравнением (12), рационально над k, т. е.*

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c), \quad \text{где } a, b, c \in k.$$

Тогда

$${}_2\mathrm{Br}(K)_{\mathrm{ur}} = {}_2\mathrm{Br}(k) \oplus I,$$

где ${}_2\mathrm{Br}(k)$ отождествляется с подгруппой в ${}_2\mathrm{Br}(K)$ с помощью канонического отображения $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(K)$, а $I \subset {}_2\mathrm{Br}(K)_{\mathrm{ur}}$ – такая подгруппа, что каждый элемент из I может быть представлен бикватернионной алгеброй вида

$$\left(\frac{r, x-b}{K}\right) \otimes_K \left(\frac{s, x-c}{K}\right)$$

для некоторых $r, s \in k^\times$.

Как мы уже упоминали выше, нужное нам множество V получается объединением множества V_0 геометрических плейсов и множества V_1, которое состоит из продолжений на K почти всех неархимедовых нормирований поля k и описывается следующим образом. Для $s \in k^\times$ обозначим через $V^k(s)$ конечное множество $\{v \in V^k \setminus V^k_\infty \mid v(s) \neq 0\}$. Зафиксируем конечное множество нормирований $S \subset V^k$, содержащее $V^k_\infty \cup V^k(2) \cup V^k(\delta)$ и все те неархимедовы $v \in V^k$, для которых хотя бы одно из чисел $v(\alpha)$, $v(\beta)$ или $v(\gamma)$ отрицательно. Для неархимедова $v \in V^k$ обозначим через $\widetilde{v}$ его продолжение на $F := k(y)$, задаваемое формулой

$$\widetilde{v}(p(y)) = \min_{a_i \neq 0} v(a_i), \quad \text{где} \quad p(y) = a_n y^n + \dots + a_0 \in k[y], \quad p \neq 0. \tag{15}$$

Заметим, что K – кубическое расширение F. Можно показать, что для $v \in V^k \setminus S$ нормирование $\widetilde{v}$ имеет *единственное* продолжение на K, которое мы будем обозначать через $w = w(v)$ (см. [5; лемма 4.5]). Мы определим

$$V_1 = \{w(v) \mid v \in V^k \setminus S\}$$

и положим $V = V_0 \cup V_1$.

Предложение 4.5. *Неразветвленная группа Брауэра* ${}_2\mathrm{Br}(K)_V$ *конечна.*

Доказательство (набросок). Мы рассмотрим ветвление относительно нормирований из V_1 отдельно для константных и бикватернионных компонент элементов ${}_2\mathrm{Br}(K)_{\mathrm{ur}}$ в смысле разложения, заданного теоремой 4.4. Представим $[D] \in {}_2\mathrm{Br}(K)_V$ в виде

$$[D] = [\Delta \otimes_k K] \otimes_K \left[\left(\frac{r, x-b}{K}\right) \otimes_K \left(\frac{s, x-c}{K}\right)\right],$$

где $[\Delta] \in {}_2\mathrm{Br}(k)$ – алгебра кватернионов и $r, s \in k^\times$. Используя свойства отображения коограничения, а также явное описание отображений вычета в этой ситуации (см. [5; предложение 4.7 и лемма 4.8]), можно показать, что для любого $v \in V^k \setminus S$ алгебра кватернионов Δ неразветвлена относительно v и

$$v(r), v(s) \equiv 0 \pmod 2. \tag{16}$$

Из этого следует конечность ${}_2\mathrm{Br}(K)_V$. Действительно, как мы видели в примере 4.1, (b), неразветвленная группа Брауэра ${}_2\mathrm{Br}(k)_{V^k \setminus S}$ конечна, и, следовательно, имеется только конечное число возможностей для $[\Delta]$. С другой стороны, как известно, из конечности числа классов и конечной порожденности группы S-единиц вытекает, что образ множества

$$P(k, S) = \{x \in k^\times \mid v(x) \equiv 0 \pmod 2 \text{ для всех } v \in V^k \setminus S\}$$

при каноническом отображении $k^\times \to k^\times/(k^\times)^2$ конечен, откуда вытекает конечность числа возможных бикватернионных компонент.

Мы теперь дадим набросок когомологического доказательства условия (16), которое напоминает рассуждение, используемое в стандартном доказательстве слабой теоремы Морделла–Вейля (см., например [46; гл. VIII, § 2]). Сначала напомним следующее определение. Пусть $v \in V^k \setminus V^k_\infty$. Будем говорить, что класс $x \in H^1(k, E[2])$ *неразветвлен* относительно v, если

$$x \in \ker\bigl(H^1(k, E[2]) \xrightarrow{\mathrm{res}_v} H^1(k_v^{\mathrm{ur}}, E[2])\bigr),$$

где k_v^{ur} – максимальное неразветвленное расширение пополнения k_v и res_v – отображение ограничения. Далее, для множества $U \subset V^k \setminus V^k_\infty$ мы определяем соответствующую группу неразветвленных когомологий как

$$H^1(k, E[2])_U = \bigcap_{v \in U} \ker\bigl(H^1(k, E[2]) \xrightarrow{\mathrm{res}_v} H^1(k_v^{\mathrm{ur}}, E[2])\bigr).$$

Показывается, что если $x \in I$ содержится в ${}_2\mathrm{Br}(K)_V$, то выполняется включение

$$\sigma^{-1}(\omega(x)) \subset H^1(k, E[2])_{V^k \setminus S},$$

где $\sigma\colon H^1(k, E[2]) \to {}_2H(k, E)$ – отображение из точной последовательности (14). С другой стороны, хорошо известно, что при каноническом изоморфизме

$$H^1(k_v^{\mathrm{ur}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq (k_v^{\mathrm{ur}})^\times/(k_v^{\mathrm{ur}})^{\times 2} \tag{17}$$

смежный класс $a(k_v^{\mathrm{ur}})^{\times 2} \in (k_v^{\mathrm{ur}})^\times/(k_v^{\mathrm{ur}})^{\times 2}$ соответствует характеру

$$\chi_a\colon\ \mathrm{Gal}((k_v^{\mathrm{ur}})^{\mathrm{sep}}/k_v^{\mathrm{ur}}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

с ядром $\ker \chi_a = \mathrm{Gal}((k_v^{\mathrm{ur}})^{\mathrm{sep}}/k_v^{\mathrm{ur}}(\sqrt{a}\,))$ (см., например, [21; предложение 4.3.6 и следствие 4.3.9]). Из этого следует, что если $a(k_v^{\mathrm{ur}})^{\times 2}$ соответствует классу когомологий, неразветвленному в v, то $\sqrt{a} \in k_v^{\mathrm{ur}}$ и, следовательно, $v(a) \equiv 0 \pmod 2$ (см. [28; предложение 1.3]). Сопоставляя это замечание с приведенным выше описанием геометрической группы Брауэра, мы видим, что неразветвленность

$$\left[\left(\frac{r, x-b}{K}\right) \otimes_K \left(\frac{s, x-c}{K}\right)\right] \in I$$

относительно $w(v) \in V_1$ влечет (16).

Отметим, что рассуждение, набросок которого мы только что привели, не только дает конечность неразветвленной группы Брауэра ${}_2\mathrm{Br}(K)_V$, но и позволяет оценить ее порядок. Точнее, имеется следующий результат.

Теорема 4.6. *Для любого конечного множества нормирований S поля k указанного выше вида неразветвленная группа Брауэра ${}_2\mathrm{Br}(K)_V$ является конечной группой, порядок которой делит*

$$2^{|S|-t} \cdot |{}_2\,\mathrm{Cl}_S(k)|^2 \cdot |U_S(k)/U_S(k)^2|^2,$$

где $t = c + 1$ и c – число комплексных классов эквивалентности нормирований k, а $\mathrm{Cl}_S(k)$ и $U_S(k)$ обозначают соответственно группу классов идеалов и группу единиц кольца $\mathscr{O}_k(S)$ элементов поля k, целых относительно всех $v \in V^k \setminus S$.

Пример 4.7. Рассмотрим эллиптическую кривую E над $\mathbb{Q}$, заданную уравнением $y^2 = x^3 - x$. Здесь $\delta = 4$, так что $S = \{\infty, 2\}$. Кроме того,

$$|S| - t = 1, \qquad \mathrm{Cl}_S(\mathbb{Q}) = 1 \quad \text{и} \quad U_S(\mathbb{Q}) = \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}.$$

Таким образом, согласно теореме 4.6 и неравенству (10), для любой алгебры кватернионов с делением D над $K = \mathbb{Q}(E)$ выполняется оценка $|\mathbf{gen}(D)| \leqslant 2 \cdot 4^2 = 32$.

5. Некоторые модификации понятия рода

В этом разделе мы обсудим несколько естественных вариаций понятия рода алгебры с делением, которые оказываются полезными в разных ситуациях.

Во-первых, можно рассмотреть *локальный род*, который уже неявно появлялся в доказательстве леммы 4.2. Пусть K – поле и V – множество дискретных нормирований поля K. Определим *локальный род* $\mathbf{gen}_V(D)$ центральной алгебры с делением D степени n над полем K как множество классов $[D'] \in \mathrm{Br}(K)$, представимых такой центральной алгеброй с делением D' степени n над K, что для любого $v \in V$ выполняется следующее: если

$$D \otimes_K K_v = M_\ell(\mathscr{D}) \quad \text{и} \quad D' \otimes_K K_v = M_{\ell'}(\mathscr{D}'),$$

где $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ – центральные алгебры с делением над пополнением K_v, то $\ell = \ell'$, а $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ имеют одинаковые максимальные сепарабельные подполя. Лемма 2.3 из [40] (см. также [20; лемма 3.1]) показывает, что для любого множества V дискретных нормирований поля K имеет место включение

$$\mathbf{gen}(D) \subset \mathbf{gen}_V(D).$$

Пусть теперь V – множество дискретных нормирований, удовлетворяющих условиям (I) и (II) из раздела 4 для некоторого целого числа $n > 1$. Тогда рассуждения из раздела 4 показывают, что если n *взаимно просто с* $\operatorname{char} K$ *и неразветвленная группа Брауэра* ${}_n\mathrm{Br}(K)_V$ *конечна, то множество* $\mathbf{gen}_V(D)$ *конечно для любой центральной алгебры с делением* D *степени* n *над* K. Действительно, как показывает доказательство леммы 4.2, уже условие $[D'] \in \mathbf{gen}_V(D)$ влечет, что для любого $v \in V$ характеры $\chi_v = \rho_v([D])$ и $\chi'_v = \rho_v([D'])$ имеют одинаковое ядро. Это замечание приводит в конечном счете к оценке (10), в которой $\mathbf{gen}(D)$ заменен на локальный род $\mathbf{gen}_V(D)$.

Далее, как мы уже упоминали в замечании 3.7, (b), Д. Крашен и К. Маккини [27] изучали алгебры с делением, имеющие одни и те же конечномерные *поля разложения*. С этой целью для конечномерной центральной алгебры с делением D над полем K определим $\mathbf{gen}'(D)$ как набор классов $[D'] \in \mathrm{Br}(K)$, удовлетворяющих следующему условию: конечное расширение поля L/K расщепляет D тогда и только тогда, когда оно расщепляет D' (обозначения в [27] немного отличаются). Понятно, что

$$\mathbf{gen}'(D) \subset \mathbf{gen}(D).$$

Основным результатом работы [27] является следующее утверждение. Если p – простое число, отличное от $\operatorname{char} K$, и

$$|\mathbf{gen}'(\Delta)| < \infty$$

для всех $[\Delta] \in {}_p\mathrm{Br}(K)$, то

$$|\mathbf{gen}'(D)| < \infty$$

для всех $[D] \in {}_p\mathrm{Br}(K(t))$ (аналогичный результат для $\mathbf{gen}(D)$ был получен в [5], но формально эти результаты не следуют один из другого).

Третье понятие, которое нам хотелось бы кратко обсудить, это так называемый *односторонний* (или *асимметричный*) *род*, который был введен в [26]. Следуя [26], для двух центральных алгебр с делением D и D' одинаковой степени над полем K будем писать

$$D \leqslant D',$$

если любое максимальное подполе P/K алгебры D вкладывается над K в алгебру D'. Для алгебры с делением D степени n над K определим односторонний род $\mathbf{gen}^1(D)$ как набор классов $[D'] \in \mathrm{Br}(K)$, где D' – такая центральная алгебра с делением степени n, что $D \leqslant D'$. Мы отсылаем читателя к [26] за более подробным обсуждением этого понятия, а здесь только прокомментируем различия в свойствах ветвлений, возникающие в ходе анализа двустороннего и одностороннего рода.

Согласно лемме 4.2, если $[D'] \in \mathbf{gen}(D)$, то дискретное нормирование v поля K ветвится в D тогда и только тогда, когда оно ветвится в D' (при условии, что отображение вычета ρ_v определено). Для одностороннего рода ситуация более сложная. Для числового поля K из замечаний, предшествующих доказательству предложения 3.1, вытекает, что отношение $D \leqslant D'$ влечет включение $R(D') \subset R(D)$ для соответствующих множеств разветвленных нормирований. С другой стороны, пусть K – поле формальных степенных рядов $\mathbb{R}((x))$ со стандартным дискретным нормированием v. Рассмотрим следующие два тела кватернионов над K:

$$D_1 = \left(\frac{-1,-1}{K}\right) \quad \text{и} \quad D_2 = \left(\frac{-1,x}{K}\right).$$

Тогда тело D_1 неразветвлено относительно v и его алгебра вычетов изоморфна телу обычных гамильтоновых кватернионов $\mathbb{H}$ над $\mathbb{R}$, в то время как тело D_2 ветвится. Каждое квадратичное подполе L тела D_1 неразветвлено над K, и, поскольку $\mathbb{C}$ является единственным нетривиальным конечным расширением поля вычетов $\overline{K}_v = \mathbb{R}$, можно сделать вывод, что L изоморфно $K(i) = \mathbb{C}((x))$ (где $i^2 = -1$). Поскольку $\mathbb{C}((x))$ содержится в D_2, мы видим, что на самом деле любое максимальное подполе D_1 можно вложить в D_2. Это означает, что $D_1 \leqslant D_2$ и, следовательно, $[D_2] \in \mathbf{gen}^1(D_1)$. Тем не менее v ветвится в D_2, но не в D_1.

Результаты работы [26] показывают, что эта конструкция доставляет в некотором смысле универсальный пример, который приводит к таким аномалиям, связанным с ветвлением. Чтобы сформулировать точные утверждения, нам потребуется ввести некоторые термины и обозначения. В [26] конечномерная центральная алгебра с делением D над полем K называлась *варьируемой* (varied), если не существует нетривиального циклического расширения P/K, которое вкладывалось бы в каждое максимальное подполе алгебры D (заметим, что это свойство достаточно проверить для циклических расширений P/K простой степени). Например, известно, что если поле K конечно порождено над глобальным полем, то любая центральная алгебра с делением D над K варьируема (см. [26; теорема 1]). Для центральной алгебры с делением D над полем K,

полным относительно дискретного нормирования, обозначим через $\overline{D}$ алгебру вычетов и через $\overline{E}_D$ ее центр; пусть E_D – единственное (с точностью до изоморфизма) неразветвленное подполе D с полем вычетов $\overline{E}_D$ (в [26] последнее называется *полем ветвления* D).

Предложение 5.1 [26; предложение 4]. *Пусть K – поле, полное относительно дискретного нормирования v, и пусть D и D' – центральные алгебры с делением над K одинаковой степени такие, что $D \leqslant D'$. Если алгебра $\overline{D}/\overline{E}_D$ варьируема над $\overline{E}_D$, то $E_D = E_{D'}$.*

Для того чтобы извлечь из этого результата информацию о ветвлении, предположим, что существует отображение вычета

$$\rho_v \colon {}_n\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{G}^{(v)}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

где $n = \deg D$. Как уже отмечалось, хорошо известно, что для $\chi_v = \rho_v([D])$ поле $\overline{E}_D$ совпадает с подполем сепарабельного замыкания поля вычетов $\overline{K}_v$, отвечающим подгруппе $\ker \chi_v$. Таким образом, согласно предложению 5.1, утверждение леммы 4.2 справедливо, как только $D \leqslant D'$, при условии, что алгебра $\overline{D}/\overline{E}_D$ варьируема; в частности, D и D' одновременно ветвятся или не ветвятся относительно v. Приведенный выше пример алгебр кватернионов над $K = \mathbb{R}((x))$ показывает, что предположение о варьируемости нельзя отбросить – заметим, что $E_{D_1} = \mathbb{R}((x))$, в то время как $E_{D_2} = \mathbb{C}((x))$. С другой стороны, оказывается, что все ситуации, в которых алгебра с делением не является варьируемой, вплотную связаны с этим примером.

Предложение 5.2 [26; § 3]. (a) *Пусть D – конечномерная центральная алгебра с делением над полем K, не являющаяся варьируемой. Тогда K – пифагорово поле и*

$$D = \left(\frac{-1,-1}{K}\right) \otimes_K D'$$

для некоторой конечномерной центральной алгебры с делением D' над K.

(b) *Пусть K – поле, полное относительно дискретного нормирования, и пусть D, D' – такие центральные алгебры с делением над K одинаковой степени, что $D \leqslant D'$. Тогда $E_D E_{D'} \subseteq E_D(\sqrt{-1}\,)$. Если $E_D \subsetneq E_{D'} = E_D(\sqrt{-1}\,)$, то степень $[E_D : K]$ нечетна и $K = F((x))$ для некоторого пифагорова поля F.*

Напомним, что поле F называется *пифагоровым*, если сумма двух квадратов в F снова является квадратом.

6. Род алгебраической группы

Мы завершим эту статью кратким обзором проводимых исследований, цель которых – распространить методы и результаты, разработанные в контексте алгебр с делением (см. разделы 3–5), на абсолютно почти простые алгебраические группы всех типов. В этой ситуации понятие алгебр с делением, обладающих одинаковыми максимальными подполями, заменяется понятием алгебраических групп с одинаковыми максимальными торами. Более точно, пусть G_1 и

G_2 – абсолютно почти простые группы над полем K. Будем говорить, что G_1 и G_2 имеют одни и те же *классы K-изоморфизма* (соответственно *K-изогении*) *максимальных K-торов*, если каждый максимальный K-тор T_1 группы G_1 K-изоморфен (соответственно K-изогенен) некоторому максимальному K-тору T_2 группы G_2, и наоборот. Далее, пусть G – алгебраическая K-группа и K^{sep} – сепарабельное замыкание поля K. Напомним, что алгебраическая K-группа G' называется K-формой (или, более точно, K^{sep}/K-формой) группы G, если G и G' изоморфны над K^{sep} (см., например, [44; гл. III, § 1] или [35; гл. II, § 2]). Например, для любой центральной алгебры с делением D степени n над K существует K^{sep}-изоморфизм $D \otimes_K K^{\mathrm{sep}} \simeq M_n(K^{\mathrm{sep}})$, что означает, что алгебраическая K-группа $G = \mathrm{SL}_{1,D}$, ассоциированная с группой элементов из D, имеющих приведенную норму 1, является K-формой SL_n.

Определение 6.1. Пусть G – абсолютно почти простая алгебраическая группа над полем K. Множество классов K-изоморфизма K-форм G' группы G, имеющих те же классы изоморфизма максимальных K-торов, что и G, называется (K-)*родом* группы G (обозначение: $\mathbf{gen}_K(G)$ или просто $\mathbf{gen}(G)$, если это не может привести к недоразумению).

Нужно отметить, что для конечномерной центральной K-алгебры с делением D только максимальные *сепарабельные* подполя в D приводят к максимальным K-торам соответствующей группы $G = \mathrm{SL}_{1,D}$. Таким образом, мы видим задним числом, что для согласования определений $\mathbf{gen}(D)$ и $\mathbf{gen}(G)$ первое из них, вероятно, следовало бы переформулировать в терминах максимальных *сепарабельных* подполей. Это изменение не повлияло бы на результаты разделов 3 и 4, ибо там рассматривались алгебры, степень которых взаимно проста с $\mathrm{char}\, K$, но пока непонятно, оказало бы это влияние на общий случай. В данной статье нас будут в основном интересовать простые алгебраические группы с одинаковыми классами *изоморфизма* максимальных торов, хотя анализ слабой соизмеримости плотных по Зарискому подгрупп, который связан с геометрическими приложениями (см. [36]), требует иногда рассмотрения простых групп с одинаковыми классами *изогении* максимальных торов.

Как и в случае алгебр с делением, мы рассмотрим следующие два вопроса.

Вопрос 1′. *Когда множество $\mathbf{gen}_K(G)$ сводится к одному элементу?*

Это означает, что среди K-групп данного типа группа G однозначно определяется с точностью до K-изоморфизма своими максимальными K-торами.

Вопрос 2′. *Когда множество $\mathbf{gen}_K(G)$ конечно?*

На данный момент полностью рассмотрен только случай абсолютно почти простых алгебраических групп над числовыми полями.

Теорема 6.2 (ср. [36; теорема 7.5]). (a) *Пусть G_1 и G_2 – связные абсолютно почти простые алгебраические группы, определенные над числовым полем K, и пусть L_i – минимальное расширение Галуа поля K, над которым G_i становится внутренней формой расщепимой группы. Если G_1 и G_2 имеют*

одинаковые классы K-изогении максимальных K-торов, то либо G_1 и G_2 имеют один и тот же тип, либо одна из групп имеет тип B_n, а другая – тип C_n ($n \geqslant 3$), и, кроме того, $L_1 = L_2$.

(b) *Зафиксируем абсолютно почти простую K-группу. Тогда множество классов изоморфизма всех абсолютно почти простых K-групп G' с теми же классами K-изогении максимальных K-торов, что и G, конечно.*

(c) *Зафиксируем абсолютно почти простую односвязную K-группу G, тип которой отличен от A_n, D_{2n+1} ($n > 1$) и E_6. Тогда любая K-форма G' группы G (другими словами, любая абсолютно почти простая односвязная K-группа G' того же типа, что и G), которая имеет те же классы K-изогении максимальных K-торов, что и G, является K-изоморфной G.*

Для типов, исключенных в формулировке части (c) теоремы, ее утверждение действительно может нарушаться. А именно, конструкция, описанная в [36; § 9], позволяет построить для каждого из этих типов неизоморфные абсолютно почти простые односвязные K-группы G_1 и G_2 данного типа, которые имеют одинаковые классы K-изоморфизма максимальных K-торов. Группы типов B_n и C_n, имеющие одни и те же классы K-изоморфизма максимальных K-торов, проанализированы в [19].

Укажем теперь на дополнительные трудности, которые возникают при изучении $\mathbf{gen}(G)$ даже в случае групп вида $G = \mathrm{SL}_{m,D}$, где D – центральная алгебра с делением степени n. Напомним, что G является односвязной внутренней формой типа A_ℓ, где $\ell = mn - 1$, и что все внутренние формы этого типа получаются таким образом (см. [35; предложение 2.17]). Каждый максимальный K-тор такой группы G является норменным тором

$$\mathrm{R}^{(1)}_{E/K}(G_m) = \mathrm{R}_{E/K}(G_m) \cap G,$$

отвечающим некоторой этальной подалгебре E матричной алгебры $M_m(D)$, где G_m – одномерный расщепимый тор, а $\mathrm{R}_{E/K}$ – функтор ограничения основного поля. Проблема заключается в том, что наличие K-изоморфизма между норменными торами $\mathrm{R}^{(1)}_{E_1/K}(G_m)$ и $\mathrm{R}^{(1)}_{E_2/K}(G_m)$, вообще говоря, не влечет изоморфности E_1 и E_2, даже если эти алгебры являются полями. По этой причине довольно сложно установить взаимоотношение между $\mathbf{gen}(G)$ и $\mathbf{gen}(D)$, которое позволило бы использовать результаты разделов 3–4. Тем не менее, используя дополнительные соображения, можно доказать следующую теорему, которая аналогична теоремам 3.3 и 3.6 для алгебр с делением.

Теорема 6.3 (см. [5; теорема 5.3]). (a) *Пусть D – центральная алгебра с делением экспоненты 2 над $K = k(x_1, \dots, x_r)$, где k – либо числовое поле, либо конечное поле характеристики $\neq 2$. Тогда для любого $m \geqslant 1$ род группы $G = \mathrm{SL}_{m,D}$ сводится к одному элементу.*

(b) *Пусть G – абсолютно почти простая односвязная алгебраическая группа внутреннего типа A_ℓ над конечно порожденным полем K, характеристика которого либо равна нулю, либо не делит $\ell + 1$. Тогда множество $\mathbf{gen}(G)$ конечно.*

Доказательство теоремы 6.3 использует так называемые *торы общего положения*. Поскольку эти торы играют все более важную роль в различных контекстах, мы напомним связанные с ними определения и результаты.

Пусть G – полупростая алгебраическая группа над полем K. Зафиксируем максимальный K-тор T группы G и обозначим через $\Phi = \Phi(G,T)$ соответствующую систему корней. Далее, пусть K_T – минимальное поле разложения тора T и $\Theta_T = \mathrm{Gal}(K_T/K)$ – его группа Галуа. Тогда естественное действие группы Θ_T на группе характеров $X(T)$ задает инъективный гомоморфизм групп

$$\theta_T\colon \Theta_T \to \mathrm{Aut}(\Phi).$$

Будем говорить, что тор T является *тором общего положения* над K, если образ гомоморфизма θ_T содержит группу Вейля $W(\Phi) = W(G,T)$. Например, для $G = \mathrm{SL}_{m,D}$ максимальный K-тор $T = \mathrm{R}^{(1)}_{E/K}(G_m)$ является тором общего положения тогда и только тогда, когда E – сепарабельное расширение поля K степени mn и группа Галуа его нормального замыкания совпадает с симметрической группой S_{mn}.

Как показывает следующий результат, в случае конечно порожденного поля K всегда найдется K-тор общего положения с заданными локальными свойствами.

Предложение 6.4 (см. [37; следствие 3.2]). *Пусть G – абсолютно почти простая группа над конечно порожденным полем K. Если v – дискретное нормирование K и T_v – максимальный K_v-тор группы G, то существует максимальный K-тор T группы G, который является тором общего положения над K и сопряжен тору T_v при помощи элемента из $G(K_v)$.*

Второй результат, который мы хотели бы упомянуть, – это своеобразная жесткость изоморфизмов между торами общего положения. Более точно, пусть G_1 и G_2 – две односвязные внутренние K-формы типа A_ℓ и T_i – максимальный K-тор общего положения в G_i для $i = 1,2$. Тогда любой K-изоморфизм $\varphi\colon T_1 \to T_2$ продолжается до K^{sep}-изоморфизма $\widetilde{\varphi}\colon G_1 \to G_2$. (Это утверждение является следствием так называемой *теоремы об изогениях*, см. [36; теорема 4.2 и замечание 4.4] и [38; теорема 9.8].) Из этого вытекает, что для норменных торов *общего положения* $T_i = R^{(1)}_{E_i/K}(G_m)$ в вышеприведенных обозначениях существование K-изоморфизма торов $T_1 \to T_2$ *влечет* наличие изоморфизма K-алгебр $E_1 \to E_2$. После этих замечаний мы в состоянии дать

Набросок доказательства теоремы 6.3. Предположим, что K – конечно порожденное поле и $G' \in \mathbf{gen}_K(G)$. Сначала показывается, что G' является внутренней формой над K и в действительности $G' = \mathrm{SL}_{m,D'}$ для некоторой центральной алгебры с делением D' степени n над K. С использованием свойства торов общего положения, доказывается, что для любого дискретного нормирования v поля K алгебры $D \otimes_K K_v$ и $D' \otimes_K K_v$ имеют одни и те же классы изоморфизма максимальных этальных подалгебр. Это означает, что для любого множества V дискретных нормирований поля K класс $[D']$ лежит в локальном роде $\mathbf{gen}_V(D)$. С другой стороны, согласно теореме 4.3, для конечно

порожденного поля K характеристики, взаимно простой с n, существует множество V дискретных нормирований поля K, удовлетворяющее условиям (I) и (II) и такое, что неразветвленная группа Брауэра ${}_n\mathrm{Br}(K)_V$ конечна. Как указывалось в разделе 5, это дает конечность локального рода $\mathbf{gen}_V(D)$, что и завершает доказательство части (b) теоремы 6.3. Для доказательства части (a) мы запишем $K = \ell(x_1)$, где $\ell = k(x_2, \ldots, x_r)$, и пусть V – множество дискретных нормирований поля K, тривиальных на ℓ. Тогда, как и в доказательстве теоремы 3.3, из того, что $[D'] \in \mathbf{gen}_V(D)$, и точной последовательности Фаддеева вытекает, что

$$[D] = [D'][\Delta \otimes_\ell K] \quad \text{в } \mathrm{Br}(K)$$

для некоторой центральной алгебры с делением Δ над ℓ. Наконец, для доказательства тривиальности Δ выберем точку $v_0 \in V$ степени один так, чтобы обе алгебры D и D' были неразветвлены относительно v_0. Пусть

$$D \otimes_K K_{v_0} = M_s(\mathscr{D}) \quad \text{и} \quad D' \otimes_K K_{v_0} = M_{s'}(\mathscr{D}'),$$

где $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ – центральные K_{v_0}-алгебры с делением. Тогда $s = s'$, а $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ имеют одинаковые максимальные (сепарабельные) подполя. Из этого следует, что алгебры вычетов $\overline{\mathscr{D}}$ и $\overline{\mathscr{D}'}$ являются центральными ℓ-алгебрами с делением, имеющими одинаковые максимальные подполя. Поскольку алгебра $\overline{\mathscr{D}}$ имеет экспоненту 2, ее род тривиален по теореме 3.3. Из этого следует, что $[\overline{\mathscr{D}}] = [\overline{\mathscr{D}'}]$, так что класс $[\Delta]$ тривиален. Таким образом, $D \simeq D'$, и, следовательно, $G \simeq G'$.

Замечание 6.5. Из приведенного выше рассуждения видно, что над конечно порожденным полем K имеет смысл рассматривать альтернативное понятие рода $\mathbf{gen}_K(G)$, определяемое в терминах максимальных K-торов общего положения.

Основываясь на последнем результате для рода внутренних форм типа A_ℓ над конечно порожденными полями (теорема 6.3, (b)), естественно предложить следующую гипотезу.

Гипотеза 6.6. *Пусть G – абсолютно почти простая односвязная алгебраическая группа над конечно порожденным полем K, характеристика которого либо равна нулю, либо является хорошей*[3] *для типа, к которому относится группа G. Тогда род $\mathbf{gen}_K(G)$ конечен.*

Доказательство теоремы 6.3 показывает, что для анализа этой гипотезы нужно распространить методы, основанные на изучении ветвления и рассмотрении неразветвленных алгебр с делением, на абсолютно почти простые группы всех типов. Адекватной заменой понятию неразветвленной центральной алгебры с делением является понятие группы с *хорошей редукцией*. Предположим, что G – абсолютно почти простая алгебраическая группа над полем K. Будем

[3] Для данного типа *плохими* будем считать следующие характеристики: для типа A_ℓ – все простые делители $(\ell+1)$, а также $p = 2$ для внешних форм; для типов B_ℓ, C_ℓ, D_ℓ – $p = 2$, а также $p = 3$ для ${}^{3,6}\mathsf{D}_4$; для типа E_6 – $p = 2, 3, 5$; для типов E_7, E_8 – $p = 2, 3, 5, 7$; для типов F_4, G_2 – $p = 2, 3$. Все остальные характеристики для данного типа будем считать *хорошими*.

говорить, что G обладает хорошей редукцией относительно дискретного нормирования v поля K, если существует редуктивная групповая схема[4] $\mathscr{G}$ над кольцом нормирования $\mathscr{O}_v \subset K_v$, общий слой $\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_v} K_v$ которой изоморфен $G \otimes_K K_v$. В этом случае мы будем обозначать через $\underline{G}^{(v)}$ редукцию $\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_v} \overline{K}_v$. Следующий результат дает обобщение леммы 4.2 для простых алгебраических групп всех типов.

Теорема 6.7 [7]. *Пусть G – абсолютно почти простая односвязная группа над полем K, и пусть v – дискретное нормирование поля K. Предположим, что поле вычетов $\overline{K}_v$ конечно порождено и G обладает хорошей редукцией относительно v. Тогда любая группа $G' \in \mathbf{gen}_K(G)$ также обладает хорошей редукцией относительно v. При этом редукция $\underline{G'}^{(v)}$ принадлежит роду $\mathbf{gen}_{\overline{K}_v}(\underline{G}^{(v)})$.*

Отметим, что доказательство этого результата снова использует торы общего положения.

Предположим теперь, что на поле K задано множество дискретных нормирований V, удовлетворяющее условию (I) (см. раздел 4), а также следующему условию:

(III) для любого нормирования $v \in V$ поле вычетов $\overline{K}_v$ конечно порождено.

Следствие 6.8. *Если K и V удовлетворяют условиям* (I) *и* (III), *то для любой абсолютно почти простой односвязной алгебраической K-группы G существует такое конечное подмножество $V_0 \subset V$ (зависящее от G), что каждая группа $G' \in \mathbf{gen}_K(G)$ обладает хорошей редукцией относительно всех $v \in V \setminus V_0$.*

Из следствия 6.8 вытекает, что для того чтобы доказать гипотезу 6.6, достаточно показать, что каждое конечно порожденное поле K обладает множеством V дискретных нормирований, которое удовлетворяет условиям (I) и (III) и имеет также следующее свойство.

(Ф) Для любой абсолютно почти простой алгебраической K-группы G такой, что $\operatorname{char} K$ является хорошей для G, и любого конечного подмножества $V_0 \subset V$ множество классов K-изоморфизма (внутренних) K-форм G' группы G, имеющих хорошую редукцию во всех $v \in V \setminus V_0$, конечно.

(В этой формулировке, очевидно, можно считать G квазиразложимой над K.) Можно ожидать, что возникшие при обсуждении теоремы 4.3 *дивизориальные* множества нормирований, состоящие из дискретных нормирований поля K, отвечающих простым дивизорам некоторой гладкой арифметической схемы X с полем рациональных функций K, будут обладать требуемым свойством для произвольных групп.

Гипотеза 6.9. *Любое дивизориальное множество V дискретных нормирований конечно порожденного поля K обладает свойством* (Ф).

[4]Пусть R – коммутативное кольцо и $S = \operatorname{Spec} R$. Напомним, что *редуктивная групповая схема* над R – это такая гладкая аффинная групповая схема $G \to S$, что геометрические слои $G_{\overline{s}}$ – связные редуктивные алгебраические группы (см. [14; лекция XIX, определение 2.7] или [11; определение 3.1.1]).

Над числовым полем K утверждение гипотезы 6.9 является простым следствием теоремы конечности для когомологий Галуа (см. [44; гл. III, § 4.6]), поскольку полупростая группа над конечным расширением поля $\mathbb{Q}_p$, обладающая хорошей редукцией, обязательно квазиразложима (см. [35; теорема 6.7]). (Интересно, что имеются неразложимые группы над $\mathbb{Q}$, которые обладают хорошей редукцией относительно *всех* простых (см. [22], [12]), но не существует абелевых многообразий над $\mathbb{Q}$, которые всюду обладают гладкой редукцией [16].) Утверждение гипотезы 6.9 для внутренних форм типа A_ℓ вытекает из конечности ${}_n\mathrm{Br}(K)_V$. Мы также имеем следующий условный результат для спинорных групп.

Пусть $\mu_2 = \{\pm 1\}$. Тогда для любого дискретного нормирования v поля K такого, что $\operatorname{char} \overline{K}_v \neq 2$, и для любого $i \geqslant 1$ можно определить отображение вычета в когомологиях Галуа

$$\rho_v^i \colon H^i(K, \mu_2) \to H^{i-1}(\overline{K}_v, \mu_2),$$

продолжающее на все размерности отображение (6), введенное в разделе 4 (см., например, [8; § 3.3] или [21; § 6.8]). Тогда для любого множества V дискретных нормирований поля K неразветвленная часть $H^i(K, \mu_2)_V$ определяется как $\bigcap\limits_{v \in V} \ker \rho_v^i$ (разумеется, $H^2(K, \mu_2)_V = {}_2\mathrm{Br}(K)_V$).

Теорема 6.10 [7]. *Пусть K и V удовлетворяют гипотезе 6.9. Предположим, что для любого конечного множества $V_0 \subset V$ неразветвленные группы когомологий $H^i(K, \mu_2)_{V \setminus V_0}$ конечны для всех $i \geqslant 1$. Тогда для любого $n \geqslant 5$ и любого конечного подмножества $V_0 \subset V$ множество классов K-изоморфизма спинорных групп $\mathrm{Spin}_n(q)$, где q – невырожденная n-мерная квадратичная форма, имеющих хорошую редукцию относительно всех $v \in V \setminus V_0$, конечно.*

Важно отметить, что спектр возможных применений гипотезы 6.9 не ограничивается конечностью рода (гипотеза 6.6) и включает, например, гипотезу конечности для слабо соизмеримых плотных по Зарискому подгрупп (см. [39; гипотеза 6.1]), а также конечность множества Тейта–Шафаревича в некоторых ситуациях. Более точно, пусть G – абсолютно почти простая односвязная алгебраическая группа над полем K хорошей характеристики, и пусть V – дивизориальное множество дискретных нормирований поля K. Обозначим

$$Ш(\overline{G}) := \ker\left(H^1(K, \overline{G}) \to \prod_{v \in V} H^1(K_v, \overline{G})\right)$$

множество Тейта–Шафаревича для соответствующей присоединенной группы $\overline{G}$. Выберем такое конечное подмножество $V_0 \subset V$, что G имеет хорошую редукцию во всех $v \in V \setminus V_0$. Пусть $\xi \in Ш(\overline{G})$ и $G' = {}_\xi G$ – соответствующая скрученная группа. По построению $G' \simeq G$ над K_v для всех $v \in V$, и, следовательно, G' обладает хорошей редукцией во всех $v \in V \setminus V_0$. Тогда, предполагая, что гипотеза 6.9 верна, мы можем сделать вывод, что для $\xi \in Ш(\overline{G})$ группы ${}_\xi G$ образуют конечное число классов K-изоморфизма; другими словами, образ $Ш(\overline{G})$ при каноническом отображении

$$H^1(K, \overline{G}) \xrightarrow{\lambda} H^1(K, \operatorname{Aut} G)$$

конечен. Но, поскольку $\overline{G} \simeq \operatorname{Int} G$ имеет конечный индекс в $\operatorname{Aut} G$, отображение λ имеет конечные слои, отсюда следует конечность $Ш(\overline{G})$.

Заметим, что теорема 6.7 может применяться не только для исследования конечности рода, но и для доказательства того, что в некоторых ситуациях род тривиален. Например, имеет место следующее утверждение.

Теорема 6.11 [7]. *Пусть G – простая группа типа G_2 над полем рациональных функций $K = k(x)$, где k – глобальное поле характеристики $\neq 2$. Тогда $\mathbf{gen}_K(G)$ состоит из одного элемента.*

Упомянем также следующий результат о стабильности.

Теорема 6.12 [7]. *Пусть G – абсолютно почти простая односвязная алгебраическая группа над конечно порожденным полем k характеристики нуль. Тогда для поля $k(x)$ рациональных функций каждая группа G' из рода $\mathbf{gen}_{k(x)}(G \otimes_k k(x))$ имеет вид $H \otimes_k k(x)$ для некоторой группы $H \in \mathbf{gen}_k(G)$.*

Объединяя эту теорему с теоремой 6.2, можно сделать вывод, что если G – абсолютно почти простая односвязная алгебраическая группа типа, отличного от A_ℓ $(\ell > 1)$, $\mathsf{D}_{2\ell+1}$ $(\ell > 1)$ и E_6, над числовым полем k, то $\mathbf{gen}_{k(x)}(G \otimes_k k(x))$ состоит из единственного элемента.

Мы начали эту статью с упоминания результата Ш. Амицура [2] о конечномерных центральных алгебрах с делением, имеющих одинаковые поля разложения, и с обсуждения того, как изменяется ситуация, если рассматривать только конечномерные поля разложений или только максимальные подполя. Это в конечном итоге привело к нашему определению рода алгебры с делением и, позже, рода простой алгебраической группы. Мы хотели бы завершить статью другим понятием рода, которое также основано на рассмотрении максимальных этальных подалгебр или максимальных торов, но в то же время отражает наличие бесконечномерных полей разложений, что является ключевым обстоятельством в теореме Амицура. Это (более функториальное) понятие было предложено А. С. Меркурьевым. Он определил *мотивный род* $\mathbf{gen}_m(G)$ абсолютно почти простой алгебраической K-группы G как множество классов K-изоморфизма K-форм G' группы G, которые имеют одинаковые классы изоморфизма максимальных торов не только над K, но и над любым расширением F поля K. Тогда из теоремы Амицура следует, что для $G = \mathrm{SL}_{1,D}$ мотивный род всегда конечен и сводится к одному элементу, если D имеет экспоненту 2. Далее, согласно результату О. Т. Ижболдина [23], для невырожденных квадратичных форм q и q' *нечетной* размерности n над полем K характеристики $\neq 2$ из условия

$(*)$ *q и q' имеют одинаковый индекс Витта над любым расширением F/K*

вытекает, что q и q' пропорциональны (этот результат неверен для форм четной размерности). Из этого следует, что для $G = \mathrm{Spin}_n(q)$, где n нечетно, $|\mathbf{gen}_m(G)| = 1$. Заметим, что условие $(*)$ эквивалентно тому факту, что мотивы q и q' в категории мотивов Чжоу изоморфны (см. [49], а также [50; теорема 4.18] и [25]), что и мотивировало выбор терминологии для этого понятия рода. Остальные группы пока не исследованы.

Первый автор получил поддержку от программы Canada Research Chair и исследовательского гранта NSERC. Второй автор получил поддержку от NSF (грант DMS-1301800), BSF (грант 201049) и фонда Александра фон Гумбольдта. Третий автор получил поддержку от NSF Postdoctoral Fellowship. Часть этой работы была написана во время конференции Second Joint International Meeting of the AMS and the IMU в Израиле (июнь 2014). Авторы благодарят университеты Бар-Илана и Тель-Авива за теплый прием.

Список литературы

[1] S. A. Amitsur, "Generic splitting fields of central simple algebras", *Ann. of Math.* (2), **62**:1 (1955), 8–43.

[2] Дж. Касселс, А. Фрёлих (ред.), *Алгебраическая теория чисел*, Мир, М., 1969, 483 с.; пер. с англ.: J. W. S. Cassels, A. Fröhlich (eds.), *Algebraic number theory*, Proceedings of the instructional conference (Univ. of Sussex, Brighton, September 1–17, 1965), 2nd ed., Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London, 2010, xviii+366 pp.

[3] V. Chernousov, V. Guletskiĭ, "2-torsion of the Brauer group of an elliptic curve: generators and relations", Proceedings of the conference on quadratic forms and related topics (Baton Rouge, LA, 2001), *Doc. Math.*, 2001, Extra vol., 85–120 (electronic).

[4] V. I. Chernousov, A. S. Rapinchuk, I. A. Rapinchuk, "On the genus of a division algebra", *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **350**:17-18 (2012), 807–812.

[5] V. I. Chernousov, A. S. Rapinchuk, I. A. Rapinchuk, "The genus of a division algebra and the unramified Brauer group", *Bull. Math. Sci.*, **3**:2 (2013), 211–240.

[6] V. I. Chernousov, A. S. Rapinchuk, I. A. Rapinchuk, "Estimating the size of the genus of a division algebra", in preparation.

[7] V. I. Chernousov, A. S. Rapinchuk, I. A. Rapinchuk, "On algebraic groups having the same maximal tori", in preparation.

[8] J.-L. Colliot-Thélène, "Birational invariants, purity, and the Gersten conjecture", *K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras* (Santa Barbara, CA, 1992), Proc. Sympos. Pure Math., **58**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 1–64.

[9] J.-L. Colliot-Thélène, "Groupe de Chow des zéro-cycles sur les variétés p-adiques (d'après S. Saito, K. Sato et al.)", *Séminaire Bourbaki*, v. 2009/2010, Exp. № 1012, Astérisque, **339**, Soc. Math. France, Paris, 2011, vii+30 pp.

[10] J.-L. Colliot-Thélène, S. Saito, "Zéro-cycles sur les variétés p-adiques et groupe de Brauer", *Internat. Math. Res. Notices*, 1996, № 4, 151–160.

[11] B. Conrad, "Reductive group schemes", *Autour des schémas en groupes*, *École d'été "Schémas en groupes"* [*Group Schemes*, *A celebration of SGA*3], v. I (Luminy, 2011), Panoramas et Synthèses, **42-43**, Soc. Math. France, Paris, 2014, http://smf4.emath.fr/en/Publications/PanoramasSyntheses/2014/42-43/html/smf_panosynth_42-43.php; 2014, 390 pp., math.stanford.edu/~conrad/papers/luminysga3.pdf.

[12] B. Conrad, "Non-split reductive groups over $\mathbb{Z}$", *Autour des schémas en groupes*, *École d'été "Schémas en groupes"* [*Group Schemes*, *A celebration of SGA*3], v. II (Luminy, 2011), Panoramas et Synthèses, Soc. Math. France, Paris (to appear); 2014, 67 pp., math.stanford.edu/~conrad/papers/redgpZ.pdf.

[13] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$. Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie, J. L. Verdier, Lecture Notes in Math., **569**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977, iv+312 pp.

[14] M. Demazure, A. Grothendieck (eds.), *Schémas en groupes*, v. III: *Structure des schémas en groupes réductifs*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure, A. Grothendieck, Lecture Notes in Math., **153**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970, viii+529 pp.

[15] B. Farb, R. K. Dennis, *Noncommutative algebra*, Grad. Texts in Math., **144**, Springer-Verlag, New York, 1993, xiv+223 pp.

[16] J.-M. Fontaine, "Il n'y a pas de variété abélienne sur $\mathbb{Z}$", *Invent. Math.*, **81**:3 (1985), 515–538.

[17] O. Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, Grad. Texts in Math., **81**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1981, viii+254 pp.

[18] K. Fujiwara, "A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber)", *Algebraic geometry* 2000 (Azumino (Hotaka)), Adv. Stud. Pure Math., **36**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, 153–183.

[19] S. Garibaldi, A. S. Rapinchuk, "Weakly commensurable S-arithmetic subgroups in almost simple algebraic groups of types **B** and **C**", *Algebra Number Theory*, **7**:5 (2013), 1147–1178.

[20] S. Garibaldi, D. Saltman, "Quaternion algebras with the same subfields", *Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology*, Dev. Math., **18**, Springer, New York, 2010, 225–238.

[21] P. Gille, T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Stud. Adv. Math., **101**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006, xii+343 pp.

[22] B. H. Gross, "Groups over $\mathbb{Z}$", *Invent. Math.*, **124**:1-3 (1996), 263–279.

[23] O. T. Izhboldin, "Motivic equivalence of quadratic forms", *Doc. Math.*, **3** (1998), 341–351 (electronic).

[24] M. Kac, "Can one hear the shape of a drum?", *Amer. Math. Monthly*, **73**:4, Part 2 (1966), 1–23.

[25] N. A. Karpenko, "Criteria of motivic equivalence for quadratic forms and central simple agebras", *Math. Ann.*, **317**:3 (2000), 585–611.

[26] D. Krashen, E. Matzri, A. S. Rapinchuk, L. Rowen, D. Saltman, "Division algebras with common subfields", in preparation.

[27] D. Krashen, K. McKinnie, "Distinguishing division algebras by finite splitting fields", *Manuscripta Math.*, **134**:1-2 (2011), 171–182.

[28] С. Ленг, *Основы диофантовой геометрии*, Мир, М., 1986, 448 с.; пер. с англ.: S. Lang, *Fundamentals of Diophantine geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983, xviii+370 pp.

[29] S. Lichtenbaum, "Duality theorems for curves over p-adic fields", *Invent. Math.*, **7**:2 (1969), 120–136.

[30] B. Linowitz, D. B. McReynolds, P. Pollack, L. Thompson, *Counting and effective rigidity in algebra and geometry*, 2014, 57 pp., arXiv: 1407.2294.

[31] C. Maclachlan, A. W. Reid, *The arithmetic of hyperbolic* 3*-manifolds*, Grad. Texts in Math., **219**, Springer-Verlag, New York, 2003, xiv+463 pp.

[32] J. S. Meyer, "Division algebras with infinite genus", *Bull. Lond. Math. Soc.*, **46**:3 (2014), 463–468.

[33] J. S. Milne, *Class field theory*, 2013, 281 pp. www.jmilne.org/math/CourseNotes/cft.html.

[34] Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры*, Мир, М., 1986, 543 с.; пер. с англ.: R. S. Pierce, *Associative algebras*, Grad. Texts in Math., **88**, Stud. Hist. Modern Sci., 9, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982, xii+436 pp.

[35] В. П. Платонов, А. С. Рапинчук, *Алгебраические группы и теория чисел*, Наука, М., 1991, 656 с.; англ. пер.: V. P. Platonov, A. S. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure Appl. Math., **139**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994, xii+614 pp.

[36] G. Prasad, A. S. Rapinchuk, "Weakly commensurable arithmetic groups and isospectral locally symmetric spaces", *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **109** (2009), 113–184.

[37] G. Prasad, A. S. Rapinchuk, "On the fields generated by the lengths of closed geodesics in locally symmetric spaces", *Geom. Dedicata*, **172** (2014), 79–120.

[38] G. Prasad, A. S. Rapinchuk, "Generic elements in Zariski-dense subgroups and isospectral locally symmetric spaces", *Thin groups and superstrong approximation*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **61**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014, 211–252.

[39] A. S. Rapinchuk, "Towards the eigenvalue rigidity of Zariski-dense subgroups", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Seoul, 2014), 247–269.

[40] A. S. Rapinchuk, I. A. Rapinchuk, "On division algebras having the same maximal subfields", *Manuscripta Math.*, **132**:3-4 (2010), 273–293.

[41] A. Reid, "Isospectrality and commensurability of arithmetic hyprebolic 2- and 3-manifolds", *Duke Math. J.*, **65**:2 (1992), 215–228.

[42] P. Roquette, *The Brauer–Hasse–Noether theorem in historical perspective*, Schriften der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, **15**, Springer-Verlag, Berlin, 2005, vi+92 pp.

[43] D. J. Saltman, *Lectures on division algebras*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **94**, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1999, viii+120 pp.

[44] J.-P. Serre, *Local fields*, Grad. Texts in Math., **67**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1979, viii+241 pp.

[45] Ж. П. Серр, *Когомологии Галуа*, Мир, М., 1968, 208 с.; пер. с фр.: J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Cours au Collège de France, 1962–1963, 2-ème éd., Lecture Notes in Math., **5**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1964, vii+212 pp.; англ. пер.: J.-P. Serre, *Galois cohomology*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 1997, x+210 pp.

[46] J. H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., **106**, Springer, Dordrecht, 2009, xx+513 pp.

[47] S. V. Tikhonov, *Division algebras of prime degree with infinite genus*, 2014, 4 pp., arXiv: 1407.5041.

[48] E. B. Vinberg, *Some examples of Fuchsian groups sitting in* $SL_2(\mathbb{Q})$, preprint № 12011 of the SFB-701, Universität Bielefeld, Bielefeld, 2012, 4 pp., http://www.math.uni-bielefeld.de/sfb701/files/preprints/sfb12011.pdf.

[49] A. Vishik, *Integral motives of quadrics*, preprint MPI-1998-13, Max Planck Institute für Mathematik, Bonn, 1998, 82 pp., http://www.mpim-bonn.mpg.de/node/263.

[50] A. Vishik, “Motives of quadrics with applications to the theory of quadratic forms”, *Geometric methods in the algebraic theory of quadratic forms*, Lecture Notes in Math., **1835**, Springer, Berlin, 2004, 25–101.

[51] A. R. Wadsworth, “Valuation theory on finite dimensional division algebras”, *Valuation theory and its applications*, v. I (Saskatoon, SK, 1999), Fields Inst. Commun., **32**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 385–449.

Владимир Иванович Черноусов
(Vladimir I. Chernousov)
University of Alberta, Edmonton, Canada
E-mail: vladimir@ualberta.ca

Андрей Степанович Рапинчук
(Andrei S. Rapinchuk)
University of Virginia, Charlottesville, USA
E-mail: asr3x@virginia.edu

Игорь Андреевич Рапинчук
(Igor A. Rapinchuk)
Harvard University, Cambridge, USA
E-mail: rapinch@math.harvard.edu

Поступила в редакцию
09.09.2014