ние начиналось из точки (4, 15) в направлении, противоположном оси $O\eta$. В первом случае построена о п т и м а л ь н а я ломаная; при этом программой произведено в первом случае 5, во втором – 5788 усечений ломаной. Тот факт, что траектория оптимальна, отчасти объясняется выбором множества элементарных участков, при котором все ломаные имеют целочисленную (точнее – четную) длину. Гораздо важнее то, что достигнут существенный выигрыш по сравнению со стратегией σ_φ.

Действительно, размеры множеств Y_{ijk} превосходят величину прохода на рис. 1, обнаруженного программой. По этой причине стратегия σ_φ не "заметила" бы узкого прохода и направила бы трассу в левый коридор, вынуждая совершить лишние маневры разворота. Что касается рис. 2, то здесь начальное множество $Y_{i_0 j_0 k_0} \ni \ni (\xi_0, \eta_0, \theta_0)$ содержит точки препятствия и, следовательно, $\varphi(\xi_0, \eta_0, \theta_0) = \infty$. Поэтому стратегия σ_φ не в состоянии обнаружить хоть какой-нибудь выход из лабиринта, представленного на рис. 2.

Все это вполне согласуется со здравым смыслом, ибо гарантированный результат для совокупности начальных условий теоретически не лучше, а практически существенно хуже результата, полученного специально для одного начального условия.

Данная модель движения автомобиля представляется чрезвычайно удобной для проверки методом оптимального управления. Было бы интересно выяснить, можно ли с помощью других методов получить траектории, аналогичные тем, которые изображены на рис. 1, 2.

Институт физико-технических проблем
Москва

Поступило
10 II 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орёл Е.Н.* – ЖВМиМФ, 1973, № 5, с. 1161–1174. 2. *Орёл Е.Н.* –ЖВМиМФ, 1978, № 4, с. 916–927. 3. *Маклейн С.* Гомология. М.: Мир, 1966. 544 с. 4. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.

УДК 512.743 МАТЕМАТИКА

А.С. РАПИНЧУК

О КОНГРУЭНЦ-ПРОБЛЕМЕ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

(Представлено академиком В.П. Платоновым 27 I 1988)

Пусть G – простая односвязная алгебраическая группа, определенная над полем алгебраических чисел K, S – конечное подмножество множества V^K всех нормирований K, содержащее множество V^K_∞ архимедовых нормирований. Обозначим через $\widehat{G(K)}$ (соответственно $\overline{G(K)}$) пополнение группы K-рациональных точек $G(K)$ относительно S-арифметической топологии (S-конгруэнц-топологии), полную систему окрестностей единицы в которой образуют подгруппы конечного индекса группы S-целых точек $G_{O(S)}$ (конгруэнц-подгруппы в $G_{O(S)}$, отвечающие ненулевым идеалам $\mathfrak{A} \subset O(S)$). Из сравнения данных топологий вытекает существование естественной проекции π: $\widehat{G(K)} \to \overline{G(K)}$, которая оказывается сюръективной, а ядро $\operatorname{Ker}\pi$, обозначаемое $C(S, G)$, носит название конгруэнц-ядра. Как известно, вычисление $C(S, G)$ эквивалентно решению конгруэнц-проблемы для группы $G_{O(S)}$ (см.

[1, 2]). В работе [2] Ж.-П. Серром сформулирована следующая конгруэнц-гипотеза: если $\mathrm{rang}_S G = \sum\limits_{v \in S} \mathrm{rang}_{K_v} G \geqslant 2$ и G изотропна над K_v для всех $v \in S \setminus V_\infty^K$, то соответствующее конгруэнц-ядро $C(S, G)$ конечно. В действительности в доказательстве здесь нуждается центральность $C(S, G)$ (т.е. принадлежность центру группы $G(\widehat{K})$), ибо тогда $C(S, G)$ оказывается двойственным к так называемому метаплектическому ядру $M(S, G)$, которое конечно и может быть точно вычислено (см. [3–5]). Центральность $C(S, G)$ при выполнении условий конгруэнц-гипотезы известна для K-изотропных групп [3, 6], для спинорных групп $G = \mathrm{Spin}_n(f)$ степени $n \geqslant 5$ [7] и для групп типа C_n (Рагунатан, Томанов). Развивая методы работы [7] и используя ряд новых соображений, связанных, в частности, с сильной аппроксимацией в произвольных многообразиях (см. [8]), удается получить доказательство конгруэнц-гипотезы для всех групп классического типа, которые имеют геометрическую реализацию достаточно большой степени. Эти результаты удобно сформулировать в виде двух теорем, первая из которых относится к группам типа ${}^2A_n$, а вторая – к группам остальных типов.

Т е о р е м а 1. *Пусть G – K-группа, определяемая $SU_m(L/K, f)$, где f – невырожденная эрмитова форма степени m, ассоциированная с квадратичным расширением L/K. Если $m \geqslant 4$, то для G справедлива конгруэнц-гипотеза.*

Т е о р е м а 2. *Пусть G – K-группа одного из типов B_n, $n \geqslant 2$, C_n, $n \geqslant 2$, D_n, $n \geqslant 5$. Тогда для G справедлива конгруэнц-гипотеза.*

Как мы уже отмечали, теорема 2 для спинорных групп квадратичных форм и для групп типа C_n не является новой, однако наше доказательство в основной своей части не использует перебора типов и позволяет рассматривать все группы одновременно.

Геометрический метод, при помощи которого получаются теоремы 1 и 2, оказывается неприменимым к большинству исключительных групп, ибо, скажем, у групп серии E удобные реализации вообще отсутствуют. Здесь при помощи принципиально новых соображений, использующих внутреннюю структуру группы, получена

Т е о р е м а 3. *Пусть G – анизотропная K-группа одного из следующих типов: E_7, E_8, F_4, G_2. Тогда при $\mathrm{rang}_S G \geqslant 2$ конгруэнц-ядро $C(S, G)$ центрально. Более того, для групп типов E_8, F_4, G_2 оно может быть точно вычислено:*

$$C(S, G) = \begin{cases} 1, \text{ если } S \neq V_\infty^K, \\ \subset E(K) \text{ в противном случае} \end{cases}$$

($E(K)$ – группа корней из единицы в поле K).

Среди указанных групп нет типа E_6. Это обусловлено тем обстоятельством, что K-группы типа E_6 не являются, вообще говоря, разложимыми над квадратичным расширением K, а группы оставшихся типов – являются. Точнее, справедливо

П р е д л о ж е н и е 1 [5]. *Пусть G – K-группа одного из типов B_n, C_n, E_7, E_8, F_4, G_2. Тогда существует максимальный K-определенный тор $T \subset G$, разложимый над квадратичным расширением L/K. Более того, если группа G разложима над K_v, то тор T можно выбрать таким образом, что $L \subset K_v$.*

Для групп типа G_2 конгруэнц-гипотеза уже доказана нами в [8]. Поэтому в оставшейся части статьи через G будет обозначаться простая односвязная анизотропная K-группа одного из типов E_7, E_8, F_4. Пусть $T \subset G$ – максимальный K-тор из предложения 1. Тогда для любого α из системы корней $R = R(T, G)$ группа G_α, порожденная одномерными унипотентными подгруппами U_α и $U_{-\alpha}$, определена над K. Группы G_α играют для рассматриваемых групп роль, аналогичную той, которую играют обычные корневые подгруппы в группах Шевалле. Используя это обстоятельство, В.И. Черноусов [9] доказал для $G(K)$ справедливость гипотезы В.П. Платонова о проективной простоте (см. [1, 10]). Несложное уточнение рассуждений из [9] позволяет получить следующий результат.

Т е о р е м а 4. *Существует конечное подмножество $S_0 \subset V^K \setminus V^K_\infty$ и открытая подгруппа $U \subset G_{S_0} = \prod_{v \in S_0} G(K_v)$ такие, что группа, порожденная $G_\alpha(K)$ для $\alpha \in \Pi$ (где $\Pi \subset R$ – подсистема простых корней), совпадает с $U \cap G(K)$.*

Для доказательства центральности $C = C(S, G)$ в теореме 3 с учетом проективной простоты $G(K)$ достаточно показать, что любой открытый нормальный делитель $W \subset C$ является нормальным делителем в $\widehat{G(K)}$. С этой целью устанавливается, что $\pi(Z) = \overline{G(K)}$, где $Z = Z_{\widehat{G(K)}}(C)$ – соответствующий централизатор. Так как $\overline{G(K)}$ совпадает с группой S-аделей $G(A(S))$ в силу сильной аппроксимационной теоремы [11], то достаточно установить, что $G(K_v) \subset \pi(Z)$ для любого $v \in V^K \setminus S$. Здесь мы разберем основной случай, когда G разложима над K_v (это условие автоматически выполняется, если G имеет тип E_8 или F_4). Выберем максимальный тор $T \subset G$, как в предложении 1, таким образом, чтобы он был разложим над K_v и соответствующее множество S_0 в теореме 4 не пересекалось с S (для типов E_8, F_4 можно просто выбрать T K_w-разложимым для $w \in S \setminus V^K_\infty$).

П р е д л о ж е н и е 2. *Существуют такие K-определенные односвязные подгруппы $H_1, \ldots, H_r \subset G$ типа A_l, $l \geqslant 4$, B_l или C_l, $l \geqslant 2$, что выполняются следующие условия:*

(i) $\operatorname{rang}_S H_i \geqslant 2$;

(ii) $H_i \cap H_j$ – *простая односвязная группа и* $\operatorname{rang}_S(H_i \cap H_j) \geqslant 1$ *для всех* i, j;

(iii) *для любых* $\alpha, \beta \in \Pi$ *найдется* $i = 1, \ldots, r$ *со свойством* $G_\alpha, G_\beta \subset H_i$.

Для получения H_i строятся такие замкнутые подсистемы $R_i \subset R$, что группы, порожденные G_α для $\alpha \in R_i$, и будут искомыми.

Обозначим через $\check{H}_i$ замыкание $H_i(K)$ в $\widehat{G(K)}$; ясно, что $\check{H}_i$ на самом деле является образом гомоморфизма S-арифметических пополнений $\widehat{H_i(K)} \to \widehat{G(K)}$. Из условия (i) предложения 2 и теорем 1, 2 вытекает, что расширение $\widehat{H_i(K)} \to \overline{H_i(K)}$ является центральным, поэтому расширение $\pi_i \colon \check{H}_i \to \overline{H_i(K)}$, $\pi_i = \pi \mid \check{H}_i$, также центрально. Для $\alpha \in \Pi$ обозначим через $\mathcal{G}_\alpha$ универсальное центральное топологическое расширение (у.ц.т.р) $G_\alpha(A(S))$. Тогда если $G_\alpha \subset H_i$, то существует единственный непрерывный гомоморфизм $\varphi_{i\alpha} \colon \mathcal{G}_\alpha \to H_i$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\check{H}_i & \xrightarrow{\pi_i} & \overline{H_i(K)} = H_i(A(S)) \\
{\scriptstyle \varphi_{i\alpha}} \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{G}_\alpha & \longrightarrow & G_\alpha(A(S))
\end{array}$$

коммутативна. Далее устанавливается, что гомоморфизм $\varphi_{i\alpha}$ не зависит от i, т.е. $\varphi_{i\alpha} = \varphi_{j\alpha}$, если $G_\alpha \subset H_i \cap H_j$. Таким образом, для каждого α имеется корректно определенный гомоморфизм $\varphi_\alpha \colon \mathcal{G}_\alpha \to \widehat{G(K)}$. Беря свободное произведение, получим гомоморфизм абстрактных групп $\varphi = \mathop{*}_{\alpha \in \Pi} \varphi_\alpha \colon \mathop{*}_{\alpha \in \Pi} \mathcal{G}_\alpha \to \widehat{G(K)}$. Имеем $\mathcal{G}_\alpha = \widetilde{G_\alpha(K_v)} \times \mathcal{G}'_\alpha$, где $\widetilde{G_\alpha(K_v)}$ – у.ц.т.р. $G_\alpha(K_v)$, $\mathcal{G}'_\alpha$ – у.ц.т.р. $G_\alpha(A(S \cup \{v\}))$. Учитывая, что для любых $\alpha, \beta \in \Pi$ можно выбрать $i = 1, \ldots, r$ со свойством $G_\alpha, G_\beta \subset H_i$, и центральность расширения $\check{H}_i \to \overline{H_i(K)}$, легко показать, что группы $\varphi_\alpha(\widetilde{G_\alpha(K_v)})$ и $\varphi_\beta(\mathcal{G}'_\beta)$ перестановочны. Поэтому φ пропускается через гомоморфизм $(\mathop{*}_\alpha \widetilde{G_\alpha(K_v)}) \times (\mathop{*}_\alpha \mathcal{G}'_\alpha) \to \widehat{G(K)}$. Далее применяется

П р е д л о ж е н и е 3. *Гомоморфизм* $\delta: \underset{\alpha}{*} \widetilde{G_\alpha(K_v)} \to \widetilde{G(K_v)}$ *сюръективен и его ядро порождается как нормальный делитель группами* $N_{\alpha,\beta} = \operatorname{Ker}(\widetilde{G_\alpha(K_v)} * * \widetilde{G_\beta(K_v)} \to \widetilde{G_{\alpha\beta}(K_v)})$, *где* $G_{\alpha\beta}$ – *подгруппа в* G, *порожденная* G_α *и* G_β, $\sim$ *означает у.ц.т.р.*

Доказательство проводится методами работы [12].

Если, как и выше, $G_\alpha, G_\beta \subset H_i$, то из центральности расширения $\check{H}_i \to \overline{H_i(K)}$ вытекает включение $N_{\alpha,\beta} \subset \operatorname{Ker}\varphi$, так что $\operatorname{Ker}\delta \subset \operatorname{Ker}\varphi$ в силу предложения 3. Другими словами, φ пропускается через гомоморфизм $\theta: \widetilde{G(K_v)} * (*\mathcal{G}'_\alpha) \to \widehat{G(K)}$. Легко видеть, что

$$\operatorname{Ker}\pi\theta = \operatorname{Ker}(\widetilde{G(K_v)} \to G(K_v)) \times \operatorname{Ker}(*\mathcal{G}'_\alpha \to G(A(S \cup \{v\}))).$$

Отсюда следует, что $\widetilde{G(K_v)}$ действует на $\operatorname{Ker}\pi\theta$ тривиально, поэтому $\theta(\widetilde{G(K_v)})$ действует тривиально на $\theta(\operatorname{Ker}\pi\theta) = \operatorname{Ker}\pi \cap \operatorname{Im}\theta = C \cap \operatorname{Im}\varphi$, и, следовательно, на замыкании $\overline{C \cap \operatorname{Im}\varphi}$. Так как $\pi\theta(\widetilde{G(K_v)}) = G(K_v)$, то осталось доказать

П р е д л о ж е н и е 4. $C = \overline{C \cap \operatorname{Im}\varphi}$.

Доказательство опирается на следующие два свойства:

1) $C \subset \overline{\operatorname{Im}\varphi}$;

2) существует компакт $B \subset \operatorname{Im}\varphi$, образ $\pi(B)$ которого открыт в $G(A(S))$.

Свойство 1) непосредственно вытекает из теоремы 4, а свойство 2) получается несложными рассуждениями из следующего факта.

П р е д л о ж е н и е 5. *Существует такой конечный набор* $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \Pi$ (*возможно, с повторениями*), *что для почти всех неархимедовых* v $G(O_v) = G_{\alpha_1}(O_v) \ldots G_{\alpha_d}(O_v)$, *где* O_v – *кольцо целых в* K_v.

Остается отметить, что точное вычисление $C(S, G)$ в теореме 4 при помощи теоремы о проективной простоте $G(K)$ сводится к определению метаплектического ядра $M(S, G)$, а последнее вычисляется методами работы [5].

Институт математики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
10 II 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Платонов В.П.* – УМН, 1982, т. 37, вып. 3, с. 3–54. 2. *Серр Ж.-П.* Сб. пер.: Математика, 1971, т. 15, № 6, с. 12–45. 3. *Raghunathan M.S.* – Publ. Math. IHES, 1976, vol. 46, p. 107–161. 4. *Prasad G., Raghunathan M.S.* – Invent. Math., 1983, vol. 71, № 1, p. 21–42. 5. *Рапинчук А.С.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1987, т. 51, № 5, с. 1033–1064. 6. *Raghunathan M.S.* – Invent. Math., 1986, vol. 85, № 1, p. 73–117. 7. *Kneser M.* – J. Reine u. angew. Math., 1979, Bd. 311/312, S. 191–214. 8. *Рапинчук А.С.* – Докл. АН БССР, 1988, т. 32. 9. *Черноусов В.И.* – ДАН, 1987, т. 296, № 6, с. 1301–1305. 10. *Платонов В.П.* – Proc. Intern. Congr. Math., Vancouver, 1974, vol. 1, p. 471–476. 11. *Платонов В.П.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1969, т. 3, № 6, с. 1211–1219. 12. *Боровой М.В.* – Функц. анализ и его прилож., 1984, т. 18, вып. 2, с. 57–58.