A. S. Rapinchuk, Class numbers in the genus of quadratic forms, and algebraic groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1981, Volume 45, Issue 4, 775–792

**СЕРИЯ**
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**
**Том 45, № 4, 1981**

УДК 513.6

РАПИНЧУК А. С.

# ЧИСЛА КЛАССОВ В РОДЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

## § 1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть $f$ — невырожденная $n$-мерная квадратичная форма с целыми коэффициентами. Важнейшим арифметическим инвариантом формы $f$, восходящим к Лагранжу и Гауссу, является число $c(f)$ классов в роде $f$. С числом $c(f)$ связан ряд классических проблем, представляющих значительный интерес не только для самой теории квадратичных форм, но и для алгебраической теории чисел, теории диофантовых уравнений и т. д.

Большинство гипотез о $c(f)$ естественным образом группируется вокруг основной проблемы определения, т. е. вычисления и характеризации, чисел $c(f)$, которая в самой общей постановке представляется малореальной. Здесь прежде всего следует различать два случая, когда $f$ является соответственно неопределенной и положительно определенной. В первом случае описание значений $c(f)$ было получено Кнезером [14]. Оказалось, что $c(f)$ всегда имеет вид $2^i$, причем любая степень двойки на самом деле реализуется как $c(g)$ для подходящей целочисленной формы $g$, рационально эквивалентной $f$. Что же касается положительно определенных форм $f$, то для них получение такого исчерпывающего результата является скорее всего невозможным, ибо число $c(f)$ может принимать весьма разнообразные значения. Поэтому естественно, что в этом случае основную роль играют качественные результаты о числе $c(f)$. В зависимости от метода их получения можно выделить несколько основных направлений.

Первое берет начало от работ Зигеля [17] по аналитической теории квадратичных форм и базируется на классической формуле для веса рода (см. [4], [17], [21]). Второе использует чисто квадратичную технику (описание квадратичных решеток, представимость чисел квадратичными формами и т. д.) и связывается в первую очередь с именами Эйхлера и О'Миры (см. [13], [15], [18], а также классификационные работы [19], [20]). Некоторые важные результаты были получены на стыке этих направлений (см., например, [16]). Наконец, третье основано на понятии группы аделей и интерпретации $c(f)$ как числа классов $\mathrm{cl}(G)$ ортогональной группы $G=O_n(f)$, т. е. числа двойных классов $G_{A(\infty)}xG_{\mathbf{Q}}$ в разложении группы аделей $G_A$ по подгруппам $G_{A(\infty)}$ и $G_{\mathbf{Q}}$ целых и главных аделей соответственно.

Недавно в работах [8], [9] были получены результаты, которые в целом дают вполне законченную картину поведения $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ для произвольной полупростой группы $G$, если рассматривать ее реализации $\varphi: G \to GL_r$ достаточно большой степени. Результаты и методы этих работ позволили решить ряд классических арифметических задач (см. [9], [10]). Если $G=SO_n(f)$, где $f$ — положительно определенная квадратичная форма, то $G$ принадлежит к выделенному в [9] классу групп компактного типа (т. е. полупростых групп $G$, обладающих почти простой компонентой $G^i$ с компактной архимедовой частью $G^i_\infty$ группы аделей), для которых была доказана следующая теорема: если $G$ — алгебраическая группа степени $n$, имеющая компактный тип, то для произвольного натурального $r$ существует такая реализация $\varphi_r$ группы $G$ степени $2n$, что число классов $\mathrm{cl}(\varphi_r(G))$ делится на $r$. Не умаляя значения этого результата, позволившего, например, впервые показать, что на множестве двойных классов $G_{A(\infty)} \backslash G_{\mathbf{Q}}$ группы $G$ компактного типа в общем случае заведомо не существует естественной групповой структуры, отметим, что из него непосредственно не удается получить соответствующий результат для числа классов $c(f)$, так как здесь необходимо исследование числа классов для $n$-мерных решеток.

Настоящая работа и посвящена $n$-мерному усилению результата из [9] о числе классов групп компактного типа. При этом мы рассматриваем полупростые алгебраические группы $G$, определенные над полем алгебраических чисел $K$, с компактной архимедовой частью $G_\infty$ группы аделей. Это существенно не ограничивает общности, так как для произвольной группы $G$ компактного типа именно компонента $G^i$ с компактной $G^i_\infty$ несет основную информацию о $\mathrm{cl}(G)$ (см. [9, § 5]).

Нашим основным результатом является.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $G$ — связная линейная алгебраическая группа степени $n$, определенная над полем алгебраических чисел $K$, причем архимедова часть $G_\infty$ группы аделей компактна. Тогда для любого натурального $r$ существует такая $\mathcal{O}(K)$-свободная решетка $L(r) \subset K^n$, что число классов $\mathrm{cl}(G^{L(r)})$ делится на $r$.*

Доказательство теоремы 1 для группы $G=SO_n(f)$, где $f$ — положительно определенная квадратичная форма, без каких либо изменений проходит для группы $G=O_n(f)$, и поскольку $c(f)=\mathrm{cl}(O_n(f)^L)$, $L$ — решетка, натянутая на базис, в котором реализована $f$ (см., например, [12]), то получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $f$ — положительно определенная квадратичная форма размерности $n \geqslant 2$ с коэффициентами из кольца целых $\mathcal{O}(K)$ вполне вещественного поля алгебраических чисел $K$. Тогда для любого натурального $r$ существует такая форма $g_r$ с коэффициентами из $\mathcal{O}(K)$, $K$-эквивалентная $f$, что число $c(g_r)$ классов в роде делится на $r$.*

Работа состоит из введения и трех параграфов. § 2 содержит ряд вспомогательных результатов, используемых далее при доказательстве теорем 1, 2. Отметим, в частности, следующий результат, который пока-

зывает, что теорема 2 на самом деле содержит наиболее существенную часть теоремы 1.

Предложение 1. *Пусть $G\subset GL_n$ — связная алгебраическая группа, определенная над полем алгебраических чисел $K$, с компактной группой $G_\infty$. Тогда существует такая положительно определенная квадратичная форма $f$ с коэффициентами из $K$ от $n$ переменных, что $G\subset SO_n(f)$.*

Далее устанавливается ряд утверждений о локальных решетках на квадратичных пространствах $(K_v^n, f)$ над пополнениями $K_v$. Эти утверждения служат основой для построения локальных компонент искомой решетки $L(r)$ в теореме 1.

Наконец, в § 2 доказывается утверждение, позволяющее строить свободную решетку $L(r)$. Дело в том, что при вычислении $\mathrm{cl}(G^L)$ над произвольным полем алгебраических чисел $K$ то или иное значение $d$ реализуется как $\mathrm{cl}(G^{L(d)})$ для некоторой, априори не свободной, решетки $L(d)\subset K^n$ (см. [8], [9], [14]). Это, вообще говоря, несколько сужает сферу приложения соответствующего результата, так как, например, несвободным квадратичным решеткам нельзя естественным образом поставить в соответствие квадратичную форму. Все эти трудности, однако, можно обойти, если при вычислении чисел классов иметь в виду

Предложение 4. *Пусть $K$ — поле алгебраических чисел с гильбертовым полем классов $\tilde{K}$, $L$ — свободная решетка над кольцом целых $\mathcal{O}(K)$ поля $K$. Тогда если решетка $M$ обладает свойством: локализации $L_v=M_v$ для всех неархимедовых $v\neq v_0$, а $\tilde{K}\subset K_{v_0}$, то $M$ свободна.*

Доказательство предложения 4 основано на конструкции некоторого естественного отображения, сопоставляющего решетке элемент группы классов поля $K$, при этом критерий свободы выглядит следующим образом: решетка $L$ свободна тогда и только тогда, если ей соответствует главный класс идеалов поля $K$. Отсюда, в частности, вытекает хорошо известный факт о том, что все решетки в основном случае $K=\mathbf{Q}$ являются свободными, так что дополнительные рассуждения типа предложения 4 здесь не нужны.

Используя предложение 4 и его доказательство, можно переформулировать теоремы реализации из [8], [9] для свободных решеток. Мы ограничимся доказательством следующего усиленного варианта теоремы Платонова об одноклассных решетках (см. [8]).

ТЕОРЕМА 3. *Для всякой неопределенной полупростой группы $G$ степени $n$ существует такая свободная решетка $L_0\subset K^n$, что* $\mathrm{cl}(G^{L_0})=1$.

(Напомним, что полупростая $K$-группа $G$ называется неопределенной или группой некомпактного типа, если для любого почти-простого сомножителя $G^i$ группа $G^i_\infty$ некомпактна. Это эквивалентно тому, что для односвязной накрывающей $\tilde{G}$ справедлива сильная аппроксимационная теорема (см. [6], [7]).)

В §§ 3, 4 теорема 1 доказывается соответственно для случаев $G=O_n(f)$ или $G=SO_n(f)$ и $G\subsetneq SO_n(f)$. При этом рассуждения § 4 су-

щественно опираются на тот структурный факт, что при $n\neq 2$, 4 группа $G=SO_n(f)$ проективно проста, т. е. не имеет нетривиальных связных нормальных делителей.

В работе без пояснений используются следующие обозначения. Для фиксированного поля алгебраических чисел $K$ с кольцом целых $\mathcal{O}=\mathcal{O}(K)$ через $V$ обозначается совокупность всех неэквивалентных нормирований $K$; $V_\infty$, $V_f$ — соответственно подмножества архимедовых и неархимедовых нормирований. Если $v\in V$, то $K_v$ — пополнение $K$ относительно $v$, если к тому же $v\in V_f$, то $\mathcal{O}_v=\mathcal{O}(K_v)$ — кольцо целых в $K_v$ и $U_v=\mathcal{O}_v^*$ — группа $v$-адических единиц (при $v\in V_\infty$ мы полагаем $\mathcal{O}_v=K_v$). Далее, для любого конечного множества $M$ через $[M]$ обозначается число его элементов; в частности, для группы $G$ и ее подгрупп $F$, $H$ через $[F\backslash G/H]$ и $[F\backslash G]$ обозначается число двойных и левых смежных классов. Из других часто встречающихся обозначений отметим следующее: если $\mathbf{e}=(e_1, \ldots, e_n)$ — ортогональный базис относительно невырожденной квадратичной формы $f$, то $\Gamma(\mathbf{e})=\{\gamma\in O_n(f)\,|\,\gamma(e_i)=\pm e_i, i=1, 2, \ldots, n\}$; ясно, что если базис $\mathbf{e}$ определен над полем $P$, то $\Gamma(\mathbf{e})\subset O_n(f)_P$.

Автор выражает глубокую благодарность В. П. Платонову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

## § 2. Предварительные результаты

В этом параграфе будут установлены некоторые вспомогательные факты, используемые далее при доказательстве теоремы 1.

Вначале мы докажем следующее утверждение, которое играет ключевую роль при доказательстве теоремы 1 в общем случае и в то же время представляет самостоятельный интерес.

Предложение 1. *Пусть $G\subset GL_n$ — связная алгебраическая группа, определенная над полем алгебраических чисел $K$, с компактной группой $G_\infty$. Тогда существует такая положительно определенная квадратичная форма $f$ с коэффициентами из $K$ от $n$ переменных, что $G\subset SO_n(f)$.*

Доказательство. Пусть $W$ — пространство всех квадратичных форм от $n$ переменных, которое можно отождествить с пространством симметрических $(n\times n)$-матриц $A\in M_n(\mathbf{C})$. Обозначим через $\widetilde{W}$ подпространство в $W$, состоящее из матриц, инвариантных относительно группы $G_K$, т. е. $\widetilde{W}=\{A\in W\,|\,{}^tgAg=A\ \ \forall g\in G_K\}$; пространство $\widetilde{W}$ $K$-определено. По условию для любого $v\in V_\infty$ группа $G_{K_v}=G_{\mathbf{R}}$ компактна и поэтому каждое пространство $\widetilde{W}_{K_v}$ обязательно содержит положительно определенную матрицу. Действительно, если $A$ — произвольная положительно определенная вещественная матрица, то

$$B=\int\limits_{G_{K_v}} {}^tgAg\,dg$$

удовлетворяет нашим требованиям (здесь $dg$ — мера Хаара на $G_{K_v}$). Отсюда следует, что подмножество положительно определенных матриц

в $\widetilde{W}_{K_v}$ является непустым и открытым. С другой стороны, будучи $K$-определенным, пространство $\widetilde{W}$ обладает свойством слабой аппроксимации, т. е. естественное вложение

$$\widetilde{W}_K \subset \prod_{v \in V_\infty} \widetilde{W}_{K_v}$$

имеет плотный образ. Поэтому $\widetilde{W}_K$ содержит положительно определенную матрицу $F$. Пусть $f$ — соответствующая ей квадратичная форма. Тогда $G_K \subset O_n(f)$. Ввиду связности $G$, множество $G_K$ плотно в $G$ в топологии Зарисского (см., например, [2]), так что $G \subset O_n(f)$, откуда и следует требуемое утверждение. Предложение 1 доказано.

Замечание. Приведенное выше доказательство предложения 1 было предложено И. К. Жуком.

Основой для построения локальных компонент искомых решеток служит

Предложение 2. *Пусть* $v \in V_f$ *и* $f = f_1 x_1^2 + \ldots + f_n x_n^2$ *в базисе* $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ *пространства* $K_v^n$, $G = O_n(f)$ — *соответствующая ортогональная группа. Обозначим через* $L_v$ *и* $L_v^{(d)}$ $\mathcal{O}_v$*-решетки с базисами* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *и* $e_1, \pi_v^d e_2, \ldots, \pi_v^{d(n-1)} e_n$ *соответственно,* $\pi_v$ — *униформизующий элемент. Тогда если* $f_i \in U_v$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$, *то стабилизатор*

$$G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(d)}} = \Gamma B_{0v},$$

*где*

$$\Gamma = \Gamma(\mathbf{e}) = \{\gamma \in G \mid \gamma(e_i) = \pm e_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

$$B_{0v} = \{x = (x_{ij}) \in G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}(\mathfrak{p}_v) \mid x_{ij} \in \pi_v^{d\,|\,i-j\,|}\,\mathcal{O}_v,\ i, j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

(*Здесь матричная запись берется относительно базиса* $\mathbf{e}$, $G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}(\mathfrak{p}_v)$ — *конгруэнц-подгруппа уровня* $\mathfrak{p}_v = \pi_v \mathcal{O}_v$.)

Доказательство. Пусть $x \in G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(d)}}$ и $x = (x_{ij})$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Тогда

$$x(\pi_v^{d(j-1)} e_j) = \sum_{i=1}^{n} \pi_v^{d(j-i)} x_{ij} (\pi_v^{d(i-1)} e_i)$$

для всех $j = 1, \ldots, n$. Поэтому $x_{ij} \in \pi_v^{d(i-j)} \mathcal{O}_v$ при $i \geqslant j$. С другой стороны, так как $x \in G$, то ${}^t x F x = F$, где $F = \operatorname{diag}(f_1, \ldots, f_n)$, ${}^t x$ — транспонированная к $x$ матрица, или $x_{ji} = f_i f_j^{-1} y_{ij}$, где $y = (y_{ij}) = x^{-1}$. Но поскольку $x \in G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(d)}}$, то и $y \in G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(d)}}$, так что согласно уже доказанному $y_{ij} \in \pi_v^{d(i-j)} \times$ $\times \mathcal{O}_v$ при $i \geqslant j$. Отсюда видно, что $x_{ij} \in \pi_v^{d(j-i)} \mathcal{O}_v$ и при $j \geqslant i$. Таким образом, во всех случаях $x_{ij} \in \pi_v^{d|i-j|} \mathcal{O}_v$. Далее, из матричного уравнения ${}^t x F x = F$ вытекает, что для любого $j = 1, \ldots, n$ $\sum_{i=1}^{n} f_i x_{ij}^2 = f_j$, откуда

$x_{jj}^2 \equiv 1 \pmod{\pi_v \mathcal{O}_v}$, или $x_{jj} \equiv \pm 1 \pmod{\mathfrak{p}_v}$. Тем самым мы доказали включение $G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(d)}} \subset \Gamma B_{0v}$. Обратное включение следует из выписанной выше формулы действия $x$ на элементы базиса $\pi_v^{d(j-1)} e_j$. Предложение 2 доказано.

Предложение 3. *Пусть* $f = f_1 x_1^2 + \ldots + f_n x_n^2$ *в базисе* $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ *пространства* $K^n$. *Тогда*:

(i) *если* $v(2) = 1$ *и* $f_1, f_2 \in U_v$, *то существует базис* $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ *пространства* $K_v^n$, *обладающий следующими свойствами*: 1) $u_i = e_i$ *для* $i > 2$; 2) $u_1, u_2$ — *ортогональный базис решетки* $\mathcal{O}_v e_1 \perp \mathcal{O}_v e_2$; 3) $u_i^2 = a f_i$, $i = 1, 2$, *где* $a \in U_v$ — *единица, не являющаяся квадратом.*

(ii) *если дополнительно* $f_i \in K_v^{*2}$ *для всех* $i = 1, \ldots, n$, $\Gamma = \Gamma(\mathbf{e})$, $\Gamma_0 = \Gamma(\mathbf{u})$, *то для любого* $g \in O_n(f)_{K_v}$ $\Gamma \cap g^{-1}\Gamma_0 g = \Gamma \cap g^{-1}\widetilde{\Gamma} g$, *где* $\widetilde{\Gamma} = \{\gamma \in \Gamma_0 \mid \det \gamma |_W = 1, W = K_v u_1 \perp K_v u_2\}$.

Доказательство. Пункт (i) легко следует из общих результатов о квадратичных решетках (см. [15]). Докажем (ii). Предположим противное. Тогда найдется $\gamma \in \Gamma_0$ такой, что $\gamma(u_1) = u_1$, $\gamma(u_2) = -u_2$ и $\overline{\gamma} = g^{-1}\gamma g \in \Gamma$. Положим $W^+ = \{w \in K_v^n \mid \gamma(w) = w\}$ и $\overline{W}^+ = \{w \in K_v^n \mid \overline{\gamma}(w) = w\}$. Из равенства $\overline{\gamma} = g^{-1}\gamma g$ вытекает, что $g(\overline{W}^+) = W^+$. В частности, пространства $W^+$ и $\overline{W}^+$ изометричны. С другой стороны, в пространстве $W^+$ может быть выбран базис вида $u_1, u_{i_2}, \ldots, u_{i_l}$, $i_j \neq 2$, так что дискриминант $\operatorname{disc}(W^+) = u_1^2 u_{i_2}^2 \ldots u_{i_l}^2 = a f_1 f_{i_2} \ldots f_{i_l} \notin K_v^{*2}$. Аналогично, в $\overline{W}^+$ существует базис вида $e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}$, откуда $\operatorname{disc}(\overline{W}^+) = f_{j_1} \ldots f_{j_m} \in K_v^{*2}$. Полученное противоречие и доказывает предложение 3.

Займемся теперь вопросом о построении свободных решеток.

Предложение 4. *Пусть* $K$ — *поле алгебраических чисел с гильбертовым полем классов* $\widetilde{K}$, $L$ — *свободная решетка над кольцом целых* $\mathcal{O}(K)$ *поля* $K$. *Тогда если решетка* $M$ *обладает свойством: локализации* $L_v = M_v$ *для всех неархимедовых* $v \neq v_0$, *а* $\widetilde{K} \subset K_{v_0}$, *то* $M$ *свободна.*

Доказательство. Напомним вначале, что гильбертовым полем классов для $K$ называется максимальное абелево расширение $K$, неразветвленное во всех точках. При этом $\widetilde{K}$ соответствует нормальной подгруппе $K^* J_K^\infty \subset J_K$, так что $\operatorname{Gal}(\widetilde{K}/K)$ изоморфна группе классов $\operatorname{Cl}(K)$ поля $K$ (здесь, как обычно, $J_K$, $J_K^\infty$ — соответственно группы иделей и целых иделей поля $K$). Кроме того, включение $\widetilde{K} \subset K_{v_0}$ равносильно тому, что главный класс $K^* J_K^\infty$ содержит все идели $i^{v_0}(\alpha)$, $\alpha \in K_{v_0}$, с компонентами

$$i_v = \begin{cases} 1, & v \neq v_0, \\ \alpha, & v = v_0, \end{cases}$$

и, таким образом, существует такой униформизующий элемент $\pi_{v_0} \in \mathcal{O}$, что $\pi_{v_0} \in U_v$ при $v \neq v_0$ (см. [5]).

Пусть $GL_{nA}$ — группа аделей, соответствующая $GL_n$. Определим действие $GL_{nA}$ на решетках $L \subset K^n$. Если $g = (g_v) \in GL_{nA}$, то $g_v(L_v) = L_v$ для почти всех $v \in V_f$ и поэтому существует такая решетка $M \subset K^n$, $M = g(L)$, что $M_v = g_v(L_v)$ для всех $v \in V_f$ (см. [15]). В случае свободной решетки

$L$ свобода $M=g(L)$ равносильна включению $g\in GL_n(K)\,GL_{n\mathbb{A}(\infty)}$. Используя сильную аппроксимационную теорему для группы $SL_n$ (см. [6], [7]), нетрудно доказать, что последнее равносильно включению $i(g)=$ $=(\det g_v)\in K^*J_K^\infty$. Таким образом, отображение $\delta$, сопоставляющее решетке $M=g(L)$ класс $i(g)K^*J_K^\infty$ в группе классов, обладает свойством: $\delta^{-1}(e)$ состоит в точности из всех свободных решеток.

Пусть теперь $M$ удовлетворяет условиям предложения. Тогда в качестве аделя $g$, переводящего $L$ в $M$, можно взять адель вида $g^{v_0}(a)$, $a\in GL_n(K_v)$, так что $i(g)=(\det g_v)=i^{v_0}(\det a)\in K^*J_K^\infty$. Предложение 4 доказано.

Как уже отмечалось во введении, предложение 4 позволяет переформулировать все теоремы реализации из работ [8], [9] для свободных решеток. Наибольший интерес представляет следующий усиленный вариант теоремы Платонова из [8] об одноклассных решетках.

ТЕОРЕМА 3. *Для всякой неопределенной полупростой группы $G$ степени $n$ существует такая свободная решетка $L_0\subset K^n$, что* $\mathrm{cl}\,(G^{L_0})=1$.

Доказательство следует общей схеме рассуждений из [8], поэтому мы укажем лишь на необходимые модификации. Как и в [8], определяющую роль играет доказанное там

Предложение 5. *Пусть $G$ — полупростая $K$-группа степени $n$, $\pi:\tilde{G}\to G$ — универсальное $K$-определенное накрытие. Тогда для любого $v\in V_f$ существует решетка $N_v\subset K_v^n$, для стабилизатора $B=G_{\mathcal{O}_v}^{N_v}$ которой имеем $G_{K_v}=B\pi_{K_v}(\tilde{G}_{K_v})$.*

В [9] доказано существование такого конечного подмножества $S_0\subset$ $\subset V_f$, что при $S\cap S_0=\varnothing$ группа $G$ обладает свойством слабой аппроксимации относительно $S$, т. е. диагональное вложение $G_K\subsetneq\prod_{v\in S}G_{K_v}$ является плотным. Используя слабую аппроксимацию для поля $K$, найдем конечное подмножество $S\subset V_f$, $S\cap S_0=\varnothing$, для которого $J_K=K^*J_K^S$, где $J_K^S$ — группа $S$-целых иделей.

Пусть теперь $L\subset K^n$ — произвольная свободная решетка. Обозначим через $D$ подгруппу в $G_A$ вида

$$D=\prod_{v\in V_\infty}G_{K_v}\times\prod_{v\in V_f\setminus S}G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}\times\prod_{v\in S}(G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}\cap\pi_{K_v}(G_{K_v}));$$

$D$ открыта в $G_A$ в адельной топологии. Из свойства слабой аппроксимации относительно $S$ вытекает существование такой конечной системы представителей $\{z_i\}_{i=1}^d$ двойных смежных классов $DzG_K$ и такого конечного подмножества $T\subset V_f$, $T\cap S=\varnothing$, что $v$-компонента $(z_i)_v=e$ для всех $v\notin T$ и всех $i=1,\ldots,d$. Зафиксируем произвольный набор решеток $M_v\subset K_v^n$ $(v\in S)$ и построим решетку $\tilde{L}\subset K^n$ с локальными компонентами

$$\tilde{L}_v=\begin{cases}L_v, & v\notin S\cup T,\\ M_v, & v\in S,\\ N_v, & v\in T,\end{cases}\tag{1}$$

где $N_v$ — решетка из предложения 5. Решетка, удовлетворяющая (1), существует (см. [15]). Рассуждения, приведенные в [8] при доказательстве теоремы об одноклассных решетках, показывают тогда, что $\mathrm{cl}(\widetilde{G^L})=1$. С другой стороны, ввиду равенства $J_K=K^*J_K{}^S$ и произвольности компонент $M_v$, можно выбрать последние таким образом, чтобы адель $g\in \in GL_{n\mathbb{A}}$, переводящий $L$ в $\widetilde{L}$, удовлетворял условию:

$$i(g)=(\det g_v)\in K^*J_K{}^\infty.$$

Но это, как мы видели при доказательстве предложения 4, эквивалентно свободе решетки $\widetilde{L}$. Теорема 3 доказана.

Завершает этот параграф

ЛЕММА 1. *Пусть $G$ — $K$-определенная алгебраическая группа и $V_1$, $V_2\subset G$ — два замкнутых по Зарисскому $K$-определенных множества. Тогда если $V_1\cap V_2=\varnothing$, то для почти всех $v\in V_f$*

$$G_{\mathcal{O}_v}(\mathfrak{p}_v)V_{1\mathcal{O}_v}\cap G_{\mathcal{O}_v}(\mathfrak{p}_v)V_{2\mathcal{O}_v}=\varnothing.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a}_i\subset \mathbf{C}[G]$ определяет $V_i$ и $f_1^{(i)},\ldots,f_{s_i}^{(i)}\in \in K[G]$ порождают $\mathfrak{a}_i$, $i=1,2$. Так как $V_1\cap V_2=\varnothing$, то найдутся такие $g_1^{(i)},\ldots,g_{s_i}^{(i)}\in K[G]$, что

$$\sum_{j=1}^{s_1} g_j^{(1)}f_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{s_2} g_j^{(2)}f_j^{(2)}=1.$$

Для почти всех $v\in V_f$ существует гладкая редукция $\mathbf{G}^{(v)}$ группы $G$ по модулю $\mathfrak{p}_v$ (см. [3]) и регулярные функции $f_1^{(1)},\ldots,f_{s_1}^{(1)},f_1^{(2)},\ldots,f_{s_2}^{(2)},g_1^{(1)},\ldots \ldots,g_{s_1}^{(1)},g_1^{(2)},\ldots,g_{s_2}^{(2)}\in\mathcal{O}_v[G]$. Для таких $v$ выполняется утверждение леммы. Действительно, пусть $x=g_1v_1=g_2v_2$, где $g_1,g_2\in G_{\mathcal{O}_v}(\mathfrak{p}_v)$, $v_1\in V_{1\mathcal{O}_v}$, $v_2\in V_{2\mathcal{O}_v}$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{s_1} g_j^{(1)}(x)f_j^{(1)}(x)+\sum_{j=1}^{s_2} g_j^{(2)}(x)f_j^{(2)}(x)=1.$$

С другой стороны, переходя к редукции по модулю $\mathfrak{p}_v$ и учитывая, что $\bar{x}=\bar{v}_1=\bar{v}_2$, получим:

$$\sum_{j=1}^{s_1} \bar{g}_j^{(1)}(\bar{v}_1)\bar{f}_j^{(1)}(\bar{v}_1)+\sum_{j=1}^{s_2} \bar{g}_j^{(2)}(\bar{v}_2)\bar{f}_j^{(2)}(\bar{v}_2)=\bar{0}$$

— противоречие. Лемма 1 доказана.

## § 3. Числа классов в роде положительно определенных квадратичных форм. Доказательство теоремы 2

Пусть $G$ — связная $K$-определенная группа степени $n$ с компактной архимедовой частью $G_\infty$ группы аделей. Тогда согласно предложению 1 существует такая положительно определенная квадратичная $K$-форма $f$, что $G\subset SO_n(f)$. Поэтому доказательство теоремы 1 естественно распада-

ется на два случая: 1) $G=SO_n(f)$; 2) $G\neq SO_n(f)$. В этом параграфе мы разберем первый случай. При этом рассуждения в равной мере годятся для групп $G=SO_n(f)$ и $G=O_n(f)$. Учитывая, однако, связь $\mathrm{cl}(O_n(f))$ с числом классов в роде формы $f$, мы проведем доказательство в случае $G=O_n(f)$. Таким образом, в этом параграфе утверждение теоремы 1 будет доказано для группы $G=O_n(f)$, что, как отмечалось во введении, автоматически влечет справедливость теоремы 2.

Переходя к доказательству, будем считать, что положительно определенная форма $f=f_1x_1^2+\ldots+f_nx_n^2$ в базисе $\mathbf{e}=(e_1, \ldots, e_n)$ пространства $K^n$. Для всякого $v\in V_f$ такого, что $\widetilde{K}\subset K_v$, выберем простой элемент $\pi_v\in\mathcal{O}$, обладающий свойством $\pi_v\in U_w$ при $w\neq v$, и обозначим через $L^{(v)}$ $\mathcal{O}$-решетку с базисом $e_1, \pi_v e_2, \ldots, \pi_v^{(n-1)}e_n$. Положим также $\Gamma=\Gamma(\mathbf{e})=\{\gamma\in G=O_n(f)\mid \gamma(e_i)=\pm e_i,\ i=1, \ldots, n\}$.

Предложение 6. *Существует $v\in V_f$, для которого $\widetilde{K}\subset K_v$, и существует разложение*

$$G_A=\bigcup_{j=1}^{s} G_{A(\infty)}^{L^{(v)}} z_j G_K$$

*группы аделей $G_A$ по подгруппам целых и главных аделей, обладающее свойством: все группы*

$$G_{\mathcal{O}}^{(j)}=z_j^{-1}G_{A(\infty)}^{L^{(v)}}z_j\cap G_K$$

*$G_{\widetilde{K}}$-сопряжены подгруппе в* $\Gamma$. *При этом для почти всех $w$ $w$-компонента $(z_j)_w=e$, $j=1, 2, \ldots, s$.*

Доказательство. Пусть $L=\mathcal{O}e_1\perp\ldots\perp\mathcal{O}e_n$ и $G_A=\bigcup_{j=1}^{t} G_{A(\infty)}^{L}\bar{z}_j G_K$— соответствующее разложение. Без ограничения общности можно считать, что для некоторого конечного подмножества $S\subset V_f$ при $w\in V\setminus S$ $w$-компонента $(\bar{z}_j)_w=e$. Положим $\overline{G}_{\mathcal{O}}^{(j)}=\bar{z}_j^{-1}G_{A(\infty)}^{L}\bar{z}_j\cap G_K$. Ввиду положительной определенности $f$, все группы $\overline{G}_{\mathcal{O}}^{(j)}$ конечны. Поэтому из теоремы плотности Чеботарева (см. [5], с. 254) вытекает существование такого $v\in V_f\setminus S$, что 1) $\widetilde{K}\subset K_v$; 2) $f_1, \ldots, f_n\in U_v$; 3) пересечение $\left(\bigcup_{j=1}^{t}\overline{G}_{\mathcal{O}}^{(j)}\right)\cap G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}(\mathfrak{p}_v)=\{e\}$.

Покажем, что $v$ — искомое. Так как при $w\neq v$ $L_w^{(v)}=L_w$, то $G_{\mathcal{O}_w}^{L_w^{(v)}}=G_{\mathcal{O}_v}^{L_w}$. В соответствии с предложением 2 для $w=v$ $G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(v)}}=\Gamma B_{0v}$; в частности, $G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(v)}}\subset G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}$. Отсюда следует, что представители классов $G_{A(\infty)}^{L^{(v)}}\setminus G_A/G_K$ могут быть выбраны среди аделей $z(a, j)$ с компонентами:

$$z(a, j)_w=\begin{cases} e, & w\notin S\cup\{v\}\\ (\bar{z}_j)_w, & w\in S,\\ a, & w=v\end{cases}\qquad a\in G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}.$$

Поэтому достаточно показать, что для любого $z(a, j)$ группа

$$G_{\mathcal{O}}^{(a,j)} = z(a, j)^{-1} G_{A(\infty)}^{L^{(v)}} z(a, j) \cap G_K$$

$G_{\overline{K}}$-сопряжена подгруппе в $\Gamma$. Пусть $x \in G_{\mathcal{O}}^{(a,j)}$. Тогда $x \in \overline{G}_{\mathcal{O}}^{(j)}$. Беря проекцию на $v$-компоненту, получаем $x = a^{-1}\gamma b a$, $\gamma \in \Gamma$, $b \in B_{0v}$. Таким образом, $x^2 \in \overline{G}_{\mathcal{O}}^{(j)}$ и $x^2 = a^{-1}(\gamma^{-1} b \gamma b) a \in G_{\mathcal{O}_v}^{L^v}(\mathfrak{p}_v)$. По построению отсюда следует, что $x^2 = e$. Поэтому требуемое вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА 2. *Пусть $\Theta \subset G_{\overline{K}}$ — подгруппа экспоненты 2. Тогда $\Theta$ $G_{\overline{K}}$-сопряжена подгруппе в $\Gamma$.*

Доказательство. Группа $\Theta$, очевидно, абелева и поэтому существует такой ортогональный базис $u_1, \ldots, u_n$ пространства $\overline{K}^n$, что $\theta(u_i) = \pm u_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и всех $\theta \in \Theta$. Действительно, пусть $u_1$ — общий собственный вектор для преобразований из $\Theta$ и $W_1 = (\overline{K}u_1)^{\perp}$ — ортогональное дополнение к прямой $\overline{K}u_1$. Тогда $W_1$ инвариантно относительно $\Theta$ и в качестве $u_2$ можно взять произвольный общий собственный вектор для ограничения $\Theta|_{W_1}$ и т. д. Без ограничения общности можно считать, что $u_i^2 = f_i$. Тогда если преобразование $x \in G_{\overline{K}}$ определяется соответствием $x(e_i) = u_i$, то $x^{-1}\Theta x \subset \Gamma$. Лемма 2 доказана и, таким образом, доказательство предложения 6 завершено.

Согласно предложению 6, можно предполагать, что $f = f_1 x_1^2 + \ldots + f_n x_n^2$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства $K^n$, причем для $L = \mathcal{O}e_1 \perp \ldots \perp \mathcal{O}e_n$ существует разложение $G_A = \bigcup_{j=1}^{s} G_{A(\infty)}^{L} z_j G_K$, для которого все группы $G_{\mathcal{O}}^{(j)} = z_j^{-1} G_{A(\infty)}^{L} z_j \cap G_K$ $G_{\overline{K}}$-сопряжены подгруппам в $\Gamma = \Gamma(\mathfrak{e})$, и, кроме того, для почти всех $v \in V_f$ $v$-компоненты $(z_j)_v = e$, $j = 1, \ldots, s$. Зафиксируем элементы $g_j \in G_{\overline{K}}$, для которых $g_j^{-1} G_{\mathcal{O}}^{(j)} g_j \subset \Gamma$. Пусть $S_1 \subset V_f$ — такое конечное подмножество, что при $v \in V_f \setminus S_1$ выполняются следующие условия:

(i) $r_1 = 2^{2n} r, f_1, \ldots, f_n \in U_v$ ($r$ — *число из теоремы* 1);

(ii) $(z_j)_v = e$ *для всех* $j = 1, \ldots, s$; (1)

(iii) $g_j$ *в базисе* $e_1, \ldots, e_n$ *целы относительно* $w$ *для всех продолжений* $w$ *нормирования* $v$ *на* $\overline{K}$, $j = 1, \ldots, s$.

Обозначим через $P$ расширение $K$, порожденное над гильбертовым полем классов $\overline{K}$ примитивным корнем $\rho_{r_1}$ степени $r_1$ из 1, элементами $\sqrt{f_1}, \ldots, \sqrt{f_n}$ и всеми коэффициентами матриц $g_j$, $j = 1, \ldots, s$.

Далее, пусть $\widetilde{\Gamma} = \{\gamma \in \Gamma \mid |\det \gamma|_w = 1, W = Ke_1 \perp Ke_2\}$ и $\Delta(\Gamma)$ — совокупность всех подгрупп группы $\Gamma$, которые $G_{\overline{K}}$-сопряжены подгруппе в $\widetilde{\Gamma}$. Для всякой подгруппы $\Gamma' \in \Delta(\Gamma)$ перенумеруем каким-либо образом элементы $\Gamma'$, скажем, $\Gamma' = \{\gamma_1', \ldots, \gamma_d'\}$ и для $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d) \in \widetilde{\Gamma}^d$ положим $V(\Gamma', \gamma) = \{g \in G \mid g^{-1}\gamma_i g = \gamma_i', i = 1, \ldots, d\}$. Очевидно, $V(\Gamma', \gamma)$ — замкнутые по Зарисскому $K$-определенные подмножества в $G$, причем если $\gamma^1 \neq \gamma^2$, то $V(\Gamma', \gamma^1) \cap V(\Gamma', \gamma^2) = \varnothing$. Поэтому из леммы 1 вытекает существование такого конечного подмножества $S_2 \subset V_f$, что при $v \in V_f \setminus S_2$ выполняется следующее условие:

$$\left.\begin{array}{c}\text{для любой подгруппы } \Gamma' \in \Delta(\Gamma) \text{ порядка } d \text{ и любых} \\ \gamma^1, \gamma^2 \in \widetilde{\Gamma}^d,\ \gamma^1 \neq \gamma^2, \text{ пересечение } G_{\mathcal{O}_v}(\mathfrak{p}_v) V(\Gamma', \gamma^1)_{\mathcal{O}_v} \cap \\ \cap\, G_{\mathcal{O}_v}(\mathfrak{p}_v) V(\Gamma', \gamma^2)_{\mathcal{O}_v} = \varnothing.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Положим $S = S_1 \cup S_2$. Тогда в соответствии с теоремой плотности Чеботарева (см. [5]) существует $v \in V_f \setminus S$, для которого $P \subset K_v$. Из наших построений вытекает, что удовлетворяются условия предложения 3, и поэтому можно рассматривать базис $u = (u_1, \ldots, u_n)$ с описанными там свойствами. Выберем простой элемент $\pi_v \in \mathcal{O}_v$, и обозначим через $M_v$ решетку с $\mathcal{O}_v$-базисом $u_1, \pi_v u_2, \ldots, \pi_v^{(n-1)} u_n$. Искомую решетку $L(r)$ определим через ее локализации следующим образом:

$$L(r)_w = \begin{cases} L_w, & w \neq v, \\ M_v, & w = v. \end{cases} \quad (3)$$

Такая решетка существует (см. [16]). Кроме того, из предложения 4 вытекает, что $L(r)$ свободна. Покажем, что число классов $\mathrm{cl}(G^{L(r)})$ делится на $r$.

Из (3) вытекает, что стабилизатор $G_{\mathcal{O}_w}^{L(r)_w} = G_{\mathcal{O}_w}^{L_w}$ при $w \neq v$ и $G_{\mathcal{O}_v}^{L(r)_v} = B_v = \Gamma_0 B_{0v}$, где $\Gamma_0 = \Gamma(\mathbf{u}) = \{\gamma \in G \mid \gamma(u_i) = \pm u_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, $B_{0v} \subset G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}(\mathfrak{p}_v)$ (см. предложение 2). В частности, $G_{A(\infty)}^{L(r)} \subset G_{A(\infty)}^{L}$. Обозначим через $c_j(v)$ число двойных смежных классов по подгруппам $G_{A(\infty)}^{L(r)}$ и $G_K$, на которые распадается класс $G_{A(\infty)}^{L} z_j G_K$. Имеет место

ЛЕММА 3. $\mathrm{cl}(G^{L(r)}) = \sum_{j=1}^{s} c_j(v)$, *причем* $c_j(v) = [B_v \setminus G_{\mathcal{O}_v}^{L_v} / G_{\mathcal{O}}^{(j)}]$.

Доказательство. Первое утверждение леммы очевидно, поэтому докажем второе. Для всякого $a \in G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}$ обозначим через $z^v(a)$ адель с компонентами

$$z^v(a)_w = \begin{cases} e, & w \neq v, \\ a, & w = v. \end{cases}$$

Тогда

$$G_{A(\infty)}^{L} z_j G_K = \bigcup_{a \in G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}} G_{A(\infty)}^{L(r)} z^v(a)\, z_j G_K.$$

Пусть теперь

$$G_{A(\infty)}^{L(r)} z^v(a)\, z_j G_K = G_{A(\infty)}^{L(r)} z^v(b)\, z_j G_K. \quad (4)$$

Тогда, так как $(z_j)_v = e$, (4) эквивалентно

$$z_j^{-1} G_{A(\infty)}^{L(r)} z_j z^v(a)\, G_K = z_j^{-1} G_{A(\infty)}^{L(r)} z_j z^v(b)\, G_K,$$

т. е. $z^v(a) = x z^v(b)\, y$, $x \in z_j^{-1} G_{A(\infty)}^{L(r)} z_j$, $y \in G_K$. Поскольку $z^v(b)^{-1} x^{-1} z^v(a) \in z_j^{-1} G_{A(\infty)}^{L(r)} z_j$, то $y \in G_{\mathcal{O}}^{(j)}$, так что, переходя к проекциям на $v$-компоненту, получим $a \in B_v b G_{\mathcal{O}}^{(j)}$. Обратно, пусть $a = \tilde{x} b \tilde{y}$, где $\tilde{x} \in B_v$, $\tilde{y} \in G_{\mathcal{O}}^{(j)}$. Поло-

жим $x = z^v(a)\,\tilde{y}^{-1}z^v(b)$. Тогда $z^v(a) = xz^v(b)\,\tilde{y}$ и достаточно установить, что $x \in z_j^{-1}G_{A(\infty)}^{L(r)}z_j$. Сразу же заметим, что $x \in z_j^{-1}G_{A(\infty)}^{L}z_j$, и поэтому достаточно показать, что $v$-компонента $x_v \in B_v$. Но $x_v = a\tilde{y}^{-1}b^{-1} = \tilde{x} \in B_v$. Таким образом, мы показали, что (4) эквивалентно $B_v a G_{\mathcal{O}}^{(j)} = B_v b G_{\mathcal{O}}^{(j)}$, откуда и следует лемма.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что число двойных классов $[B_v \backslash G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}/G_{\mathcal{O}}^{(j)}]$ делится на $r$ для любого $j = 1, \ldots, s$. Заметим теперь, что из условия (iii) в (1) вытекает, что $g_j^{-1}G_{\mathcal{O}}^{(j)}g_j \subset \Gamma$, $g_j \in G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}$ для всех $j = 1, \ldots, s$. Кроме того, так как $\rho_{r_1} \in K_v$ и $v(r_1) = 1$, то если $q_v$ — число элементов поля вычетов для $K_v$, $q_v - 1$ делится на $r_1 = 2^{2n}r$. Поэтому требуемое вытекает из следующего утверждения.

Предложение 7. *Пусть $H$ — такая конечная подгруппа в $G_{\mathcal{O}_v} = G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}$, что $g^{-1}Hg \subset \Gamma$ для некоторого $g \in G_{\mathcal{O}_v}$. Тогда число двойных смежных классов $B_0 \backslash G_{\mathcal{O}_v}/H$ имеет вид $\dfrac{a(q_v - 1)}{2^{2n}}$ для некоторого целого $a$.*

Очевидно, порядок $H$ равен $2^m$, $0 \leqslant m \leqslant n$. Для всякого $i = 0, 1, \ldots, m$ положим

$$D_i = \{g \in G_{\mathcal{O}_v} \mid [H : H \cap (g^{-1}B_v g)] = 2^i\}.$$

ЛЕММА 4. $[B_v \backslash G_{\mathcal{O}_v}/H] = \sum_{i=0}^{m} 2^{-(n+i)}\,[B_{0v} \backslash D_i]$ (*напомним, что $B_v = \Gamma_0 B_{0v}$, так что $B_{0v} = B_v \cap G_{\mathcal{O}_v}(\mathfrak{p}_v)$*).

Доказательство. Имеем $[B_v \backslash G_{\mathcal{O}_v}/H] = \sum_{i=0}^{m} [B_v \backslash D_i/H]$, поэтому достаточно показать, что $[B_v \backslash D_i / H] = 2^{-(n+i)}[B_{0v} \backslash D_i]$. Установим вначале, что каждый класс $B_v xH$, $x \in D_i$, содержит $2^{n-m+i}$ классов $B_{0v}yH$. Действительно, $B_v xH = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} B_{0v}\gamma xH$. Пусть теперь $B_{0v}\gamma_1 xH = B_{0v}\gamma_2 xH$. Тогда $\gamma_2^{-1}\gamma_1 b \in xHx^{-1}$, $b \in B_{0v}$. Таким образом, класс $B_v xH$ распадается в точности на $[\Gamma_0 : \Gamma_0']$ классов $B_{0v}yH$, где $\Gamma_0' = \{\gamma \in \Gamma_0 \mid \gamma B_{0v} \cap (xHx^{-1}) \neq \varnothing\}$. Но если $\gamma b = xhx^{-1}$ ($\gamma \in \Gamma_0$, $b \in B_{0v}$, $h \in H$), то, во-первых, элемент $h$ определен однозначно (т. е. не зависит от $b$) и лежит в $H \cap (x^{-1}B_v x)$ и, во-вторых, соответствие $\gamma \mapsto h$ определяет биекцию $\Gamma_0' \leftrightarrow H \cap (x^{-1}B_v x)$. Поэтому индекс $[\Gamma_0 : \Gamma_0'] = 2^{n-m}[H : H \cap (x^{-1}B_v x)] = 2^{n-m+i}$. Мы доказали, что $[B_v \backslash D_i / H] = 2^{-(n-m+i)}[B_{0v} \backslash D_i / H]$, и, таким образом, теперь достаточно установить, что $[B_{0v} \backslash D_i / H] = 2^{-m}[B_{0v} \backslash D_i]$. Для этого покажем, что каждый класс $B_{0v}xH$ содержит $2^m$ классов $B_{0v}y$. Пусть $B_{0v}xh_1 = B_{0v}xh_2$. Тогда $xh_2h_1^{-1}x^{-1} \in B_{0v} \subset G_{\mathcal{O}_v}(\mathfrak{p}_v)$, так что $h_2h_1^{-1} \in G_{\mathcal{O}_v}(\mathfrak{p}_v)$, откуда $h_1 = h_2$, что и означает требуемое. Здесь мы воспользовались тем фактом, что $H \cap G_{\mathcal{O}_v}(\mathfrak{p}_v) = (e)$, так как $g^{-1}Hg \subset \Gamma$ ($g \in G_{\mathcal{O}_v}$) и $\Gamma \cap G_{\mathcal{O}_v}(\mathfrak{p}_v) = (e)$. Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 вытекает, что для доказательства предложения 7 достаточно установить равенство $[B_{0v}\backslash D_i]=a_i(q_v-1)$ с целым $a_i$ для любого $i=0, 1, \ldots, m$. Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_t$ — все подгруппы в $H$ индекса $2^i$. Положим $D_i^j=\{g\in G_{\mathcal{O}_v} \mid H\cap(g^{-1}B_vg)=H_j\}$. Тогда, очевидно, $[B_{0v}\backslash D_i]=\sum_{j=1}^{t}[B_{0v}\backslash D_i^j]$ и поэтому достаточно показать, что каждое $[B_{0v}\backslash D_i^j]$ имеет вид $a_i^j(q_v-1)$. Другими словами, достаточно доказать следующее: если $H'$ — подгруппа группы $H$ и $D(H')=\{g\in G_{\mathcal{O}_v} \mid H\cap(g^{-1}B_vg)=H'\}$, то $B_{0v}\backslash D(H')]$ делится на $q_v-1$. Обозначим $\tilde{D}(H')=\{g\in G_{\mathcal{O}_v} \mid H'\subset g^{-1}B_vg\}$, и пусть $\Psi(H')$ — множество подгрупп группы $H$, строго содержащих $H'$. Тогда

$$[B_{0v}\backslash D(H')]=[B_{0v}\backslash\tilde{D}(H')]-[B_{0v}\backslash\bigcup_{H''\in\Psi(H')}\tilde{D}(H'')].$$

Воспользуемся теперь следующей общеизвестной комбинаторной леммой.

ЛЕММА 5. *Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — конечные множества. Тогда*

$$[A_1\cup\ldots\cup A_m]=\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l+1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_l\leqslant m}[A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_l}].$$

Так как $\tilde{D}(H_1'')\cap\tilde{D}(H_2'')=\tilde{D}(H_1''H_2'')$, то из леммы 5 вытекает существование таких целых $b_{H''}$, что

$$[B_{0v}\backslash\bigcup_{H''\in\Psi(H')}\tilde{D}(H'')]=\sum_{H''\in\Psi(H')}b_{H''}[B_{0v}\backslash\tilde{D}(H'')].$$

Поэтому, окончательно, нужно доказать

Предложение 8. *Пусть $H'\subset H$. Тогда $[B_{0v}\backslash\tilde{D}(H')]$ делится на $q_v-1$.*

Доказательство. Мы знаем (см. формулировку предложения 7), что для некоторого $g_0\in G_{\mathcal{O}_v}$ $g_0^{-1}H'g_0=\Gamma'=\{\gamma_1', \ldots, \gamma_d'\}\subset\Gamma$.

ЛЕММА 6. $\tilde{D}(H')=\bigcup_{\gamma\in\tilde{\Gamma}^d}B_{0v}V(\Gamma', \gamma)_{\mathcal{O}_v}g_0^{-1}$.

Доказательство. Пусть $x\in\tilde{D}(H')$, т. е. $H'\subset x^{-1}B_vx$, что эквивалентно $\Gamma''=xg_0\Gamma'g_0^{-1}x^{-1}\subset B_v$. Так как $\Gamma''$ — 2-группа, а $\Gamma_0$ — силовская 2-подгруппа проконечной группы $B_v$, то для некоторого $b\in B_{0v}$ $\Gamma'''=bxg_0\Gamma'g_0^{-1}x^{-1}b^{-1}=b\Gamma''b^{-1}\subset\Gamma_0$ (см. [11]). Пусть $\Gamma'''=\{\gamma_1, \ldots, \gamma_d\}$, причем элементы занумерованы таким образом, что $bxg_0\gamma_i'g_0^{-1}x^{-1}b^{-1}=\gamma_i$, $i=1, \ldots, d$. Но тогда $bxg_0\in V(\Gamma', \gamma)_{\mathcal{O}_v}$ для $\gamma=(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ и $x\in B_{0v}V(\Gamma', \gamma)_{\mathcal{O}_v}g_0^{-1}$, так что для доказательства леммы осталось установить, что $\Gamma'''\subset\tilde{\Gamma}$, однако это непосредственно вытекает из пункта (ii) предложения 3. Отметим также, что если $\tilde{D}(H')=\varnothing$, то и объединение в правой части пусто. Лемма 6 доказана.

Продолжая доказательство предложения 8, заметим, что из леммы 6 и условия (2) следует, что

$$[B_{0v}\backslash\tilde{D}(H')]=\sum_{\gamma\in\tilde{\Gamma}^d}[B_{0v}\backslash B_{0v}V(\Gamma', \gamma)_{\mathcal{O}_v}].$$

Далее, если $\gamma=(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\overline{\Gamma}=\{\gamma_1, \ldots, \gamma_d\}$ и $g_\gamma \in V(\Gamma', \gamma)_{\mathcal{O}_v}$, то $V(\Gamma', \gamma)_{\mathcal{O}_v}=C(\overline{\Gamma})_{\mathcal{O}_v} g_\gamma$, где $C(\overline{\Gamma})$ — централизатор $\overline{\Gamma}$ в $G$. Поэтому

$$[B_{0v} \backslash \widetilde{D}(H')] = \sum_{\gamma \in \Phi_d} [C(\overline{\Gamma})_{\mathcal{O}_v} : C(\overline{\Gamma})_{\mathcal{O}_v} \cap B_{0v}],$$

где $\Phi_d=\{\gamma \in \widetilde{\Gamma}^d \mid V(\Gamma', \gamma)_{\mathcal{O}_v} \neq \varnothing\}$; покажем, что $[C(\overline{\Gamma})_{\mathcal{O}_v} : C(\overline{\Gamma})_{\mathcal{O}_v} \cap B_{0v}]$ делится на $q_v-1$. Действительно, последний индекс делится на $[C(\overline{\Gamma})_{\mathcal{O}_v} : C(\overline{\Gamma})_{\mathcal{O}_v}(\mathfrak{p}_v)]$. Так как $\overline{\Gamma} \subset \widetilde{\Gamma}$, то $C(\overline{\Gamma}) \supset T$, где $T$ — одномерный тор $SO_2(W) \perp (e) \perp \ldots \perp (e)$, $W$ натянуто на $u_1, u_2$ (или, что то же самое, на $e_1, e_2$). Поэтому $[C(\overline{\Gamma})_{\mathcal{O}_v} : C(\overline{\Gamma})_{\mathcal{O}_v}(\mathfrak{p}_v)]$ делится на $[T_{\mathcal{O}_v} : T_{\mathcal{O}_v}(\mathfrak{p}_v)]$. Наконец, $T$ разложим над $K_v$ (так как $f_1, -f_2 \in U_v^2$), откуда $[T_{\mathcal{O}_v} : T_{\mathcal{O}_v}(\mathfrak{p}_v)] = q_v-1$. Предложения 7, 8 доказаны, а это и завершает доказательство теоремы 1 для $G=O_n(f)$.

## § 4. Доказательство теоремы 1. Общий случай

Пусть $G$ — связная $K$-определенная алгебраическая группа степени $n$ с компактной группой $G_\infty$ и положительно определенная квадратичная форма $f$ выбрана в соответствии с предложением 1 таким образом, что $G \subset SO_n(f)$. Так как случай $G=SO_n(f)$ был разобран в § 3, то для завершения доказательства теоремы 1 осталось исследовать случай $G \neq SO_n(f)$. Здесь ключевую роль играет

Предложение 9. *Пусть $G$ — собственная связная $K$-определенная подгруппа группы $SO_n(f)$. Тогда существует такой ортогональный относительно $f$ базис $\mathbf{e}=(e_1, \ldots, e_n)$ пространства $K^n$, что пересечение $G \cap \Gamma(\mathbf{e})$ лежит в центре $Z(G)$ группы $G$.*

Доказательство Будем вначале предполагать, что группа $SO_n(f)$ проективно проста, т. е. $n \neq 2, 4$. Пусть $\mathbf{e}^0=(e_1^0, \ldots, e_n^0)$ — некоторый ортогональный базис пространства $K^n$ и $\Gamma_0=\Gamma(\mathbf{e}^0)$. Для произвольного $g \in SO_n(f)_K$ обозначим через $g(\mathbf{e}^0)$ базис $(g(e_1^0), \ldots, g(e_n^0))$. Тогда $\Gamma(g(\mathbf{e}^0))=g\Gamma_0 g^{-1}$, так что для доказательства предложения достаточно доказать следующее: существует $g \in SO_n(f)_K$ со свойством $G \cap (g\Gamma_0 g^{-1}) \subset Z(G)$. Предположим противное. Тогда для любого $g \in SO_n(f)_K$ найдется нецентральный $x(g)=g\gamma(g)g^{-1} \in G$, $\gamma(g) \in \Gamma_0$. Зафиксируем некоторый максимальный тор $T \subset G$. Ввиду полупростоты $x(g)$ и теоремы сопряженности для максимальных торов (см. [2]), существует такой $h(g) \in G$, что $h(g)x(g)h(g)^{-1}=h(g)g\gamma(g)g^{-1}h(g)^{-1} \in T$. Пусть $\Gamma_0=\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{2^n}\}$, $t_1, \ldots, t_s$ — все нецентральные элементы второго порядка в $T$ и $I=\{(i, j) \mid \exists g_{ij} \in SO_n(f)\ \ g_{ij}\gamma_i g_{ij}^{-1}=t_j\}$. Если в этих обозначениях $\gamma(g)=\gamma_i$, $h(g)x(g)h(g)^{-1}=t_j$, то $t_j=h(g)gg_{ij}^{-1}t_j g_{ij} g^{-1}h(g)^{-1}$, так что $h(g)gg_{ij}^{-1}$ принадлежит централизатору $C(t_j)=C_{so_n(f)}(t_j)$. Ввиду произвольности $g$, отсюда следует, что $SO_n(f)_K \subset \bigcup_{(i,j)\in I} GC(t_j)g_{ij}$. Переходя к замыканию в топологии Зарисского, получим $SO_n(f)=\bigcup_{(i,j)\in I} \overline{GC(t_j)}\, g_{ij}$,

или, учитывая связность $SO_n(f)$, $SO_n(f)=\overline{GC(t_{j_0})}g_{i_0j_0}$, т. е. $SO_n(f)=\overline{GC(t_{j_0})}$. Из последнего равенства вытекает, что класс сопряженности

$$\{g^{-1}t_{j_0}g\}_{g\in SO_n(f)}\subset\overline{\{g^{-1}t_{j_0}g\}_{g\in G}}\subset G.$$

Поэтому нормальный делитель группы $SO_n(f)$, порожденный $t_{j_0}$, содержится в $G$. Но поскольку $G\neq SO_n(f)$, то из проективной простоты $SO_n(f)$ (см., например, [1]) вытекает, что $t_{j_0}\in Z(SO_n(f))$, и тем более $t_{j_0}\in Z(G)$. Полученное противоречие и доказывает требуемое.

Нам осталось разобрать случаи $n=2$, 4. Если $n=2$, то $SO_n(f)$ — одномерный тор, так что $G=(e)$, и доказывать нечего. Пусть теперь $n=4$. Тогда известно (см. [1]), что $H=SO_n(f)=H_1H_2$ — почти прямое произведение двух своих нормальных делителей, изоморфных $SL_2$. Рассуждая, как и выше, получим, что если утверждение предложения не выполняется, то $G$ содержит нецентральный нормальный делитель группы $H$. Поэтому либо $H_1$, либо $H_2$ содержится в $G$. Пусть для определенности $H_1\subset G$. Рассмотрим фактор-морфизм $\pi: H\to H/H_1=F$; группа $F$ изоморфна $PSL_2$. Если допустить, что для всякого $h\in H_K$ найдется $x(h)\in G\cap(h\Gamma_0h^{-1})$ такой, что $x(h)\notin Z(G)$, то для любого $g\in\pi(H_K)$ существует $y(g)\in\pi(G)\cap(g\pi(\Gamma_0)g^{-1})$, $y(g)\neq e$. Действительно, если $x(h)\in H_1$, то при изоморфизме $H_1\simeq SL_2$ он перейдет в матрицу $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, так что $x(h)\in Z(H_1)$, а поэтому и $Z(G)$. Таким образом, можно положить $y(g)=x(\pi^{-1}(g))$. Группа $\pi(G)$ связна, так что вышеприведенное рассуждение с использованием плотности $\pi(H_K)$ в $F$ показывает, что $\pi(G)\lhd F$. Так как группа $F$ проста, а $\pi(G)\neq(e)$, то $\pi(G)=F$, откуда $G=SO_n(f)$ — противоречие. Предложение 9 полностью доказано.

Замечание. На самом деле в предложении 9 доказывается даже существование такого $g\in SO_n(f)_K$, что $G\cap(g\Gamma_0g^{-1})\subset Z(SO_n(f))$.

Зафиксируем ортогональный базис $\mathbf{e}=(e_1,\ldots,e_n)$ со свойством, указанным в предложении 9, и пусть в этом базисе $f=f_1x_1^2+\ldots+f_nx_n^2$. Для произвольного нормирования $v\in V_f$ такого, что $\tilde{K}\subset K_v$, выберем простой элемент $\pi_v\in\mathcal{O}$ со свойством $\pi_v\in U_w$ для $w\neq v$, и для целого $d>0$ обозначим через $L^{(v,d)}$ $\mathcal{O}$-решетку с базисом $e_1,\pi_v^{d}e_2,\ldots,\pi_v^{d(n-1)}e_n$.

Предложение 10. *Существуют такие $v\in V_f$, $d>0$, что для некоторого разложения* $G_A=\bigcup_{j=1}^{s}G_{A(\infty)}^{L^{(v,d)}}z_jG_K$ *все группы*

$$G_{\mathcal{O}}^{(j)}=z_j^{-1}G_{A(\infty)}^{L^{(v,d)}}z_j\cap G_K$$

*содержатся в $Z(G)$. При этом для почти всех $v$ $(z_j)_v=e$.*

Доказательство. Положим $L=\mathcal{O}e_1\perp\ldots\perp\mathcal{O}e_n$, и пусть $G_A=\bigcup_{j=1}^{t}G_{A(\infty)}^{L}\bar{z}_jG_K$ — такое разложение, что для некоторого конечного подмножества $S\subset V_f$ $(\bar{z}_j)_v=e$ при $v\in V_f\setminus S$. Выберем, исходя из теоремы плот-

ности Чеботарева, такое $v \in V_f \setminus S$, что $\widetilde{K} \subset K_v$ и $f_1, \ldots, f_n \in U_v$. Далее, ввиду компактности $G_\infty$, все группы $\overline{G}_{\mathcal{O}}^{(j)} = \bar{z}_j^{-1} G_{A(\infty)}^{L} \bar{z}_j \cap G_K$ конечны; положим

$$\Phi = \left( \bigcup_{j=1}^{t} \overline{G}_{\mathcal{O}}^{(j)} \right) \setminus Z(G), \quad D = \{ g^{-1} \varphi g \mid g \in G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}, \quad \varphi \in \Phi \}.$$

В силу конечности $\Phi$ и компактности $G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}$, множество $D$ компактно. Так как

$$G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(v,d)}} = G \cap O_n(f)_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(v,d)}},$$

а из предложения 2 вытекает, что

$$\bigcap_{d=1}^{\infty} O_n(f)_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(v,d)}} = \Gamma(\mathfrak{e}),$$

то

$$\bigcap_{d=1}^{\infty} G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(v,d)}} \subset Z(G);$$

в частности,

$$\bigcap_{d=1}^{\infty} (G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(v,d)}} \cap D) = \varnothing.$$

Из компактности $D$ тогда выводим, что для некоторого $d_0$ пересечение

$$\bigcap_{d=1}^{d_0} (G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(v,d)}} \cap D) = \varnothing,$$

а так как

$$G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(v,d_1)}} \subset G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(v,d_2)}}$$

при $d_1 \geqslant d_2$, то для $d = d_0$

$$G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(v,d)}} \cap D = \varnothing,$$

т. е. для любого $g \in G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}$

$$(g^{-} G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(v,d)}} g) \cap \Phi = \varnothing.$$

Покажем, что решетка $L^{(v,d)}$ — искомая.

Как и при доказательстве предложения 6, заключаем, что в качестве представителей классов $G_{A(\infty)}^{L^{(v,d)}} \setminus G_A / G_K$ могут быть выбраны адели $z(a, j)$, $a \in G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}$ с локальными компонентами

$$z(a, j)_w = \begin{cases} e, & w \notin S \cup \{v\}, \\ (\bar{z}_j)_w, & w \in S, \\ a, & w = v. \end{cases}$$

Поэтому достаточно показать, что любая группа

$$G_{\mathcal{O}}^{(a,j)} = z(a, j)^{-1} G_{A(\infty)}^{L^{(v,d)}} z(a, j) \cap G_K$$

содержится в $Z(G)$. Пусть $x \in G_{\mathcal{O}}^{(a,j)}$ и $x \in Z(G)$. Тогда $x \in \overline{G}_{\mathcal{O}}^{(j)}$, так что $x \in \Phi$. С другой стороны, переходя к проекциям на $v$-компоненту, получим

$$x \in a^{-1} G_{\mathcal{O}_v}^{L_v^{(v,d)}} a,$$

что противоречит нашим построениям. Предложение 10 доказано.

Теперь уже легко завершить доказательство теоремы 1. Действительно, принимая во внимание предложение 10, можно с самого начала предполагать, что базис $e_1, \ldots, e_n$ выбран таким образом, что для некоторого разложения $G_A = \bigcup_{j=1}^{s} G_{A(\infty)}^{L} z_j G_K$ все группы $G_{\mathcal{O}}^{(j)} = z_j^{-1} G_{A(\infty)}^{L} z_j \cap G_K$ содержатся в $Z(G)$, причем для $v \in V_f \setminus S$ $(z_j)_v = e$, где $S \subset V_f$ — конечное подмножество. Зафиксируем некоторый максимальный $K$-определенный тор $T \subset G$ с полем разложения $R$ и обозначим через $P$ расширение $K$, порожденное $\widetilde{K}$, $R$ и примитивным корнем $\rho_{r_1}$ степени $r_1 = 2^n mr$ из единицы, где $m = \text{Н. О. К.}\ ([G_{\mathcal{O}}^{(1)}], \ldots, [G_{\mathcal{O}}^{(s)}])$. Выберем такое нормирование $v \in V_f \setminus S$, что $P \subset K_v$, причем $r_1, f_1, \ldots, f_n \in U_v$ и существует гладкая редукция $T^{(v)}$ тора $T$ по модулю $v$ (см. [3]). Пусть $\pi_v \in \mathcal{O}$ — такой простой элемент, что $\pi_v \in U_v$ при $w \neq v$, и $L(r)$ — решетка с базисом $e_1, \pi_v e_2, \ldots, \pi_v^{(n-1)} e_n$. Покажем, что число классов $\mathrm{cl}\,(G^{L(r)})$ делится на $r$.

Имеем $G_{\mathcal{O}_w}^{L(r)w} = G_{\mathcal{O}_w}^{L_w}$ при $w \neq v$ и $G_{\mathcal{O}_v}^{L(r)v} = B_v = G \cap (\Gamma(\mathfrak{e}) B_{0v})$ (см. предложение 2), так что $G_{A(\infty)}^{L(r)} \subset G_{A(\infty)}^{L}$. Обозначим через $c_j(v)$ число классов $G_{A(\infty)}^{L(r)} x G_K$, на которые распадается класс $G_{A(\infty)}^{L} z_j G_K$. Как и в лемме 3, убеждаемся, что $\mathrm{cl}\,(G^{L(r)}) = \sum_{j=1}^{s} c_j(v)$, причем $c_j(v) = [B_v \setminus G_{\mathcal{O}_v}^{L_v} / G_{\mathcal{O}}^{(j)}]$, а так как $G_{\mathcal{O}}^{(j)} \subset Z(G)$, то $c_j(v) = [G_{\mathcal{O}_v}^{L_v} : G_{\mathcal{O}}^{(j)} B_v]$. Таким образом, достаточно показать, что все числа $c_j(v)$ делятся на $r$. Но

$$[G_{\mathcal{O}_v}^{L_v} : G_{\mathcal{O}}^{(j)} B_v] = \frac{[G_{\mathcal{O}_v}^{L_v} : G_{\mathcal{O}_v}^{L_v} \cap B_{0v}]}{[G_{\mathcal{O}}^{(j)} B_v : G_{\mathcal{O}_v}^{L_v} \cap B_{0v}]};$$

при этом, очевидно, знаменатель делит $2^n m$. Поэтому достаточно показать, что числитель делится на $2^n mr$. С другой стороны, $[G_{\mathcal{O}_v}^{L_v} : G_{\mathcal{O}_v}^{L_v} \cap B_{0v}]$ делится на $[G_{\mathcal{O}_v}^{L_v} : G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}(\mathfrak{p}_v)]$, а значит, и на $[T_{\mathcal{O}_v}^{L_v} : T_{\mathcal{O}_v}^{L_v}(\mathfrak{p}_v)]$. Последний индекс, однако, совпадает с числом точек $[\underline{T}_{k_v}^{(v)}]$ редукции $\underline{T}^{(v)}$ над полем вычетов $k_v$, и так как $T$ разложим, то $[\underline{T}_{k_v}^{(v)}] = (q_v - 1)^{\dim T}$, где $q_v = [k_v]$. Осталось заметить, что $\rho_{r_1} \in K_v$, $v(r_1) = 1$, так что $q_v - 1$ делится на $r_1 = 2^n mr$.

Теорема 1 полностью доказана.

**Литература**


1. *Артин Э.* Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969.
2. *Борель А.* Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972.
3. *Вейль А.* Адели и алгебраические группы.— Математика, 1964, т. 8, № 4, с. 3—74.
4. *Вейль А.* О формуле Зигеля в теории классических групп.— Математика, 1969, т. 13, № 6, с. 18—98.
5. *Касселс Дж., Фрелих А.* Алгебраическая теория чисел. М.: Мир, 1969.
6. *Платонов В. П.* Проблема сильной аппроксимации и гипотеза Кнезера — Титса для алгебраических групп.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1969, т. 33, № 6, с. 1211—1219.
7. *Платонов В. П.* Дополнение к работе «Проблема сильной аппроксимации и гипотеза Кнезера — Титса для алгебраических групп».— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1970, т. 34, № 4, с. 775—777.
8. *Платонов В. П., Бондаренко А. А., Рапинчук А. С.* Числа и группы классов алгебраических групп.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1979, 43, № 3, с. 603—627.
9. *Платонов В. П., Бондаренко А. А., Рапинчук А. С.* Числа и группы классов алгебраических групп. II.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1980, т. 44, № 2, с. 395—414.
10. *Рапинчук А. С.* К гипотезе Платонова о роде в арифметических группах.— Докл АН БССР, 1981, т. 25, № 2, с. 101—104.
11. *Серр Ж.-П.* Когомологии Галуа. М.: Мир, 1968.
12. *Borel A.* Some finiteness properties of adele groups over number fields.— Publ. Math. I. H. E. S., 1963, № 16, p. 101—126.
13. *Eichler M.* Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer — Verlag, 1952.
14. *Kneser M.* Klassenzahlen indefiniter quadratischer Formen in drei oder mehr Veränderlichen.— Arch. Math., 1956, B. 7, № 5, s. 323—332.
15. *O'Meara O. T.* Introduction to quadratic forms, Berlin — Heidelberg — New York, Springer — Verlag, 1963.
16. *Pfeuffer H.* Einklassige Geschlechter totalpositiver quadratischer Formen in totalreelen algebraischen Zahlkorpern.— J. Number Theory, 1971, v. 3, s. 371—411.
17. *Siegel C. L.* Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. I, II, III.— Ann. Math., 1935, B. 36, s. 527—606; 1936, B. 37, s. 230—263; 1937, B. 38, s. 212—291.
18. *Watson G. L.* Integral quadratic forms. Cambridge Univ. Press, 1960.
19. *Watson G. L.* One-class genera of positve ternary quadratic forms.— Mathematika, 1975, v. 22, № 1, p. 1—11.
20. *Watson G. L.* One-class genera of positive quadratic forms in at least five variables.— Acta Arithm., 1975, v. 26, № 3, p. 305—327.
21. *Weil A.* Sur la théorie des formes quadratiques.— Colloq. Théorie des Groupes Algebriques (Bruxelles, 1962), Paris, 1962, p. 9—22.


Поступила в редакцию
1.IV.1981