V. P. Platonov, A. A. Bondarenko, A. S. Rapinchuk, Class numbers and groups of algebraic groups. II, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1980, Volume 44, Issue 2, 395–414

СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
Том 44, № 2, 1980

УДК 513.6

В. П. ПЛАТОНОВ, А. А. БОНДАРЕНКО, А. С. РАПИНЧУК

ЧИСЛА И ГРУППЫ КЛАССОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП. II

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Настоящая работа является непосредственным продолжением работы ([1]). Мы сохраняем здесь основные понятия и обозначения из ([1]). Напомним, в частности, что для произвольной K-реализации $\varphi: G \to GL_r(\Omega)$ линейной алгебраической группы G, определенной над полем K алгебраических чисел, через $\varphi(G)_A$, $\varphi(G)_{A(\infty)}$, $\varphi(G)_K$ обозначаются соответственно группы аделей, целых и главных аделей группы $\varphi(G)$. Число двойных классов $\varphi(G)_{A(\infty)} x \varphi(G)_K$ в разложении группы $\varphi(G)_A$ по подгруппам $\varphi(G)_{A(\infty)}$ и $\varphi(G)_K$ всегда конечно, обозначается через $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ и называется числом классов алгебраической группы $\varphi(G)$. Всякая K-реализация φ группы G задается некоторой решеткой $L(\varphi) \subset K^r$ и вместо $\varphi(G)$ мы будем часто писать $G^{L(\varphi)}$. Отметим, что $\mathrm{cl}(\varphi(G)) = \mathrm{cl}(G^{L(\varphi)})$ является числом классов в роде решетки $L(\varphi)$ относительно группы G. В работе ([1]) содержатся все наиболее существенные результаты о вычислении $\mathrm{cl}(\varphi(G))$, среди которых центральное место занимает вычисление числа классов для полупростых групп. Полупростая группа G называется неопределенной или некомпактного типа, если архимедова часть G^i_∞ группы аделей некомпактна для каждого простого сомножителя G^i группы G. Решающую роль при вычислении $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ играет тот факт, что $\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K$ является подгруппой, содержащей коммутант группы $\varphi(G)_A$, и $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ представляет порядок абелевой группы $\varphi(G)_A/\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K = \mathscr{G}\mathrm{cl}(\varphi(G))$, названной в ([1]) группой классов алгебраической группы $\varphi(G)$. Пусть m — порядок ядра F универсального накрытия $\pi: \tilde{G} \to G$. Тогда для неопределенной группы G $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ является делителем числа m^d, $d \geqslant 0$. В ([1]) показано, что всякое число m^d реализуется в качестве $\mathrm{cl}(\varphi_d(G))$ для подходящей реализации φ_d и поставлен вопрос о реализации в качестве числа классов любого числа вида $p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$, где $p_1, \ldots, p_s$ — все различные простые делители m. Там же сформулирован и более тонкий вопрос: пусть f — показатель ядра F накрытия π; всякая ли конечная абелева группа экспоненты f реализуется в качестве $\mathscr{G}\mathrm{cl}(\varphi(G))$? Для циклической группы F положительный ответ на эти вопросы получен в ([1]). Здесь мы получаем следующий окончательный результат.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G — неопределенная полупростая группа, $\mathfrak{f}$ — показатель ядра F универсального накрытия $\pi:\tilde{G}\to G$. Для любой конечной абелевой группы B экспоненты $\mathfrak{f}$ существует такая K-реализация φ_B группы G, что группа классов $\mathscr{G}\mathrm{cl}(\varphi_B(G))\simeq B$. В частности, эффективно определяется такое n, что G является линейной группой степени n и для любого числа вида $p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$, где $p_1, \ldots, p_s$ — все различные простые делители порядка $[F]$, существует такая решетка $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)\subset K^n$, что* $\mathrm{cl}\,(G^{M(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}) = p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s}$.

Заметим, что в случае циклической фундаментальной группы F все возможные числа классов для группы G степени l реализуются уже на решетках $M\subset K^{2l}$. Вопрос о возможности реализации на решетках степени l для любой неопределенной группы остается пока открытым, хотя важный факт о существовании одноклассных решеток любой размерности доказан в [1] (теорема 2). Разработанные в [1] и в § 3 настоящей статьи методы могут быть применены для решения некоторых классических задач о вычислении числа классов в роде решеток на пространствах с заданным действием алгебраической группы. Мы решаем в § 3 в качестве примера задачу о вычислении числа классов в роде решеток полной матричной алгебры относительно сопряженности.

Предложение 4. *Пусть $n=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\cdots p_r^{\gamma_r}$ — каноническое разложение числа n. Тогда для любой полной решетки $L\subset M_n(K)$ число $c(L)$ классов в роде имеет вид $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$, и обратно, для любого числа $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$ существует такая решетка $L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$, что $c(L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)) = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$.*

Выше уже отмечалось, что успех в вычислении $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ для неопределенных полупростых групп G решающим образом зависит от интерпретации числа классов как группового индекса $[\varphi(G)_A:\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K]$. Оказывается, наличие групповой структуры в классе $\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K$ накладывает жесткие ограничения на число классов: $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ должно быть делителем $[F]^d$. Для формулировки точного результата напомним, что $\Psi_A=\prod_{v\in V}\psi_{K_v}$, где $\psi_{K_v}:G_{K_v}\to H^1(K_v, F)$ — кограничный морфизм.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть φ — такая реализация полупростой K-определенной группы G, что главный класс $\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K$ является подгруппой группы $\varphi(G)_A$. Тогда число классов $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ может быть вычислено по формуле*

$$\mathrm{cl}(\varphi(G))=[\Psi_A(\varphi(G)_A):\Psi_A(\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K)];$$

в частности, $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ является делителем числа вида $[F]^d$, $d\geqslant 0$.

Для полупростых групп G, не являющихся неопределенными, проблема вычисления $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ представляется малореальной. В [1] приведен ряд примеров, из которых следует, что $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ в этом случае может принимать весьма разнообразные значения, никак не связанные с порядком фундаментальной группы F. На самом деле справедливо следующее общее утверждение, которое мы доказываем в § 5.

Полупростые группы G, не являющиеся неопределенными, будем называть группами компактного типа. Это вполне естественно, так как компактность типа G эквивалентна существованию простой компоненты G^i группы G с компактной архимедовой частью G^i_∞.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть G — полупростая алгебраическая группа компактного типа и степени n. Тогда для любого натурального r существует такая решетка $M(r)\subset K^{2n}$, что $\mathrm{cl}(G^{M(r)})$ делится на r.*

Замечание. В действительности теорема 3 верна и в более общей ситуации групп G квазикомпактного типа. Так мы называем алгебраические группы G, обладающие почти прямым сомножителем, который является либо группой компактного типа, либо тором. Доказательство при этом усложняется незначительно. Для торов этот результат фактически содержится в ([1]), так как мы модифицируем доказательство предложения 9.

Из теорем 2, 3 непосредственно вытекают следующие довольно неожиданные утверждения.

Следствие 1. *Если G — полупростая группа компактного типа, то существует бесконечное множество таких ее K-реализаций φ, что класс $\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K$ не является подгруппой в $\varphi(G)_A$.*

Следствие 2. *Для полупростой группы G главный класс $\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K$ является подгруппой группы $\varphi(G)_A$ для всех K-реализаций φ тогда и только тогда, если группа G некомпактного типа, и только для таких полупростых групп число $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ является делителем $[F]^d$, $d\geqslant 0$, для всех φ.*

§ 2. Конструкция решеток

Пусть G — полупростая K-определенная алгебраическая группа. Тогда G может быть включена в последовательность $\widetilde{G}\xrightarrow{\pi}G\xrightarrow{\rho}\overline{G}$, где $\widetilde{G}$, $\overline{G}$ — соответственно односвязная и присоединенная группы того же типа, что и G, π, ρ — K-определенные изогении (см. ([4])). Обозначим через $\overline{\varphi}_0:\overline{G}\to GL_l(\Omega)$ ($l=\dim G$) точное K-представление группы $\overline{G}$, получаемое из присоединенного действия группы $\widetilde{G}$ на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\overline{\varphi}:\overline{G}\to GL_{2l}(\Omega)$ — представление, определяемое формулой

$$\overline{\varphi}:g\to\begin{bmatrix}\overline{\varphi}_0(g) & 0\\ 0 & E_l\end{bmatrix}\quad(g\in\overline{G}),\tag{1}$$

где E_l — единичная матрица степени l. Зафиксируем некоторый максимальный K-определенный тор $T\subset\widetilde{G}$ с полем разложения P.

Группа $\widetilde{G}$ над полем P разлагается в прямое произведение $\widetilde{G}=\prod_{i=1}^{r}\widetilde{G}_i$ P-определенных простых компонент $\widetilde{G}_i$. Пусть θ_i обозначает каноническую проекцию $\widetilde{G}\to\widetilde{G}_i$. Тогда максимальный тор T и центр $Z=Z(\widetilde{G})$

группы $\widetilde{G}$ соответственно разлагаются в прямые произведения

$$T = \prod_{i=1}^{r} T_i, \quad Z = \prod_{i=1}^{r} Z(\widetilde{G}_i),$$

где $T_i = \theta_i(T)$, $Z(\widetilde{G}_i) = \theta_i(Z)$. Если $\widetilde{G}_i$ не является группой типа D_{2n}, то $Z(\widetilde{G}_i)$ — циклическая группа. Для $G_i \simeq D_{2n}$ центр $Z(\widetilde{G}_i) = F_1^{(i)} \times F_2^{(i)}$, где $F_1^{(i)}$, $F_2^{(i)}$ — циклические группы второго порядка. Из интерпретации $\widetilde{G}_i$ как спинорной группы $\mathrm{Spin}(f)$ подходящей квадратичной формы максимального индекса над P следует, что $F_1^{(i)}$ можно считать включенной в одномерный P-разложимый подтор $H_i \subset T_i$. Пусть H_i' — прямое дополнение тора H_i в T_i, определенное над полем P. Обозначим через τ_i каноническую проекцию $T \to H_i'$. Пусть t — число простых компонент типа D_{2n} в разложении группы $\widetilde{G}$. Определим систему $\Omega = (\omega_i)$, $i = 1, \ldots, r+t$, морфизмов $\omega_i : T \to T_i$ следующим образом: для $1 \leqslant i \leqslant r$ $\omega_i = \theta_i|_T$, для $r+1 \leqslant i \leqslant r+t$ $\omega_i = \tau_i$.

Напомним, что для всякого расширения $R \supseteq K$ через $\overline{\psi}_R : \overline{G}_R \to H^1(R, Z)$ обозначается когроничный морфизм, соответствующий точной последовательности $1 \to Z \to \widetilde{G} \xrightarrow{\pi \circ \rho} \overline{G} \to 1$. Пусть $Z_i = \omega_i(Z)$. Каждый морфизм ω_i индуцирует гомоморфизм $(\omega_i)_{K_v} : H^1(K_v^{\text{нр}}/K_v, Z) \to H^1(K_v^{\text{нр}}/K_v, Z_i)$ групп одномерных неразветвленных когомологий.

Предложение 1. *Существует такое конечное множество нормирований $S' \subset V_{(f)}$, что для всех нормирований $v \in V_{(f)} \setminus S'$ с условием $P \subset K_v$ найдется решетка $M_v^j \subset K_v^{2l}$, $1 \leqslant j \leqslant r+t$, для которой $\overline{\psi}_{K_v}(\overline{G}_{O_v}^{M_v^j}) = \mathrm{Ker}(\omega_j)_{K_v}$.*

Доказательство. Будем считать фиксированной решетку M в алгебре Ли $\mathfrak{g}_K$, определяющую присоединенную реализацию группы $\overline{G}$; $\overline{G}_i = (\pi \circ \rho)(\widetilde{G}_i)$, $\overline{T} = (\pi \circ \rho)(T)$. Для почти всех нормирований v с условием $P \subset K_v$

$$\overline{G}_{O_v}^{M_v} = \prod_{i=1}^{r} (\overline{G}_i)_{O_v}^{M_v},$$

а из предложения 3 в [1] следует, что для почти всех v

$$\overline{\psi}_{K_v}((\overline{G}_{O_v}^{M_v}) = H^1(K_v^{\text{нр}}/K_v, Z),$$

$$\overline{\psi}_{K_v}^{(i)}((\overline{G}_i)_{O_v}^{M_v}) = H^1(K_v^{\text{нр}}/K_v, Z(\widetilde{G}_i)).$$

Тем самым определяется множество S' как множество всех тех нормирований, для которых приведенные выше равенства нарушаются.

Если ω_j индуцируется θ_j, т. е. $1 \leqslant j \leqslant r$, то достаточно построить такую решетку M , что

$$\overline{\psi}_{K_v}(\overline{G}_{O_v}^{M_v^j}) = \prod_{i \neq j} H^1(K_v^{\text{нр}}/K_v, Z(\widetilde{G}_i)).$$

Пусть $l_t = \dim \widetilde{G}_t$; тогда решетка $M_v = \sum\limits_t^{\oplus} M_v(t)$, где решетка $M_v(t) \subset K_v^{l_t}$ и определяет присоединенную K_v-реализацию группы $\overline{G}_t$. Из предложения 2 в ([1]) следует существование такой решетки $N_j \subset K_v^{2l_j}$, что $(\overline{G}_j)_{O_v}^{N_j} = (\overline{G}_j)_{O_v}^{M_v(j)}(\mathfrak{p}_v)$, т. е. совпадает с главной конгруэнц-подгруппой уровня $\mathfrak{p}_v$. Тогда решетка

$$M_v^j = \left(\sum_{t \neq j}^{\oplus} M_v'(t)\right) \oplus N_j,$$

где $M_v'(t) = M_v(t) \oplus L(t)_v$, $L(t) \subset K^{l_t}$ — произвольная полная решетка с тривиальным действием $\overline{G}$, обладает требуемым свойством, ибо

$$\overline{\psi}_{K_v}^{(i)}((\overline{G}_i)_{O_v}^{M_v^j}) = \begin{cases} H^1(K_v^{\text{нр}}/K_v, Z_i), & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Для $\omega_j = \tau_j$ рассуждение аналогично. Предложение 1 доказано.

В заключение этого параграфа приведем для удобства ссылок одно непосредственное следствие предложения 4 работы ([1]).

ЛЕММА 1. *Для всякого $v \in V_{(f)}$ существует такая решетка $N_v \subset K_v^n$, что $\psi_{K_v}(G_{O_v}^{N_v}) = H^1(K_v, F)$.*

Доказательство. В ([1]) установлено существование решетки $N_v \subset K_v^n$ для стабилизатора $B_v = G_{O_v}^{N_v}$ которой выполняется равенство $G_v = B_v \pi_v(\widetilde{G}_v)$. Тогда $\psi_{K_v}(B_v) = \psi_{K_v}(G_v) = H^1(K_v, F)$, поскольку $H^1(K_v, \widetilde{G}) = 1$ (см. ([7])). Лемма 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе будет доказана

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G — неопределенная полупростая группа, f — показатель ядра F универсального накрытия $\pi : \widetilde{G} \to G$. Для любой конечной абелевой группы B экспоненты f существует такая K-реализация φ_B группы G, что группа классов $\mathcal{G}\mathrm{cl}(\varphi_B(G)) \simeq B$. В частности, эффективно определяется такое n, что G является линейной группой степени n и для любого числа вида $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — все различные простые делители порядка $[F]$, существует такая решетка $M(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \subset K^n$, что $\mathrm{cl}(G^{M(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)}) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$.*

Доказательство теоремы 1 начнем с леммы.

ЛЕММА 2. *Существует такое конечное подмножество $U \subset V_{(f)}$, что для $v_1, v_2, \ldots, v_d \notin U$ естественный гомоморфизм $t : H^1(K, F) \to \prod_{i=1}^{d} H^1(K_{v_i}, F)$ сюръективен.*

Доказательство. С помощью стандартной процедуры (см., например, [6]) группа F может быть включена в точную последовательность

$$1 \to F \to T_1 \xrightarrow{\theta} T_2 \to 1, \qquad (1)$$

где T_i $(i=1, 2)$ — K-торы, причем тор T_1 квазиразложим. Последовательность ([1]) индуцирует следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc}
T_{1K} & \xrightarrow{\theta} & T_{2K} & \xrightarrow{\sigma} & H^1(K, F) & \xrightarrow{\delta} & H^1(K, T_1) \\
\alpha_1\downarrow & & \alpha_2\downarrow & & \alpha_3\downarrow & & \alpha_4\downarrow \\
\prod_{i=1}^{d} T_{1v_i} & \xrightarrow{\Theta} & \prod_{i=1}^{d} T_{2v_i} & \xrightarrow{\Sigma} & \prod_{i=1}^{d} H^1(K_{v_i}, F) & \xrightarrow{\Delta} & \prod_{i=1}^{d} H^1(K_{v_i}, T_1)
\end{array}$$

Пусть R — общее поле разложения торов T_1 и T_2 и U — множество всех неархимедовых нормирований поля K, разветвленных в R. Если теперь $v_1, v_2, \ldots, v_d \notin U$, то все расширения RK_{v_i}/K_{v_i} являются циклическими, так что по теореме Серра α_2 есть плотное вложение. Отсюда следует, что

$$\prod_{i=1}^{d} T_{2v_i} = \alpha_2(T_{2K}) \prod_{i=1}^{d} \pi_{v_i}(T_{1v_i}),$$

в силу чего α_3 индуцирует сюръекцию $\sigma(T_{2K})$ на $\Sigma\left(\prod_{i=1}^{d} T_{2v_i}\right)$. Теперь остается заметить, что отображения σ и Σ на самом деле сюръективны, так как по теореме 90 Гильберта $H^1(P, T_1)=1$ для любого расширения P поля K. Лемма 2 доказана.

Пусть $\bar{\varphi} : \bar{G} \to GL_{2l}(\Omega)$ — точное K-определенное представление присоединенной группы $\bar{G}$, определяемое формулой (1) § 2, $\mu : G \to GL_m(\Omega)$ — некоторая K-реализация G. Обозначим тогда через φ представление $\mu \oplus (\bar{\varphi} \circ \rho)$ группы G степени $n=m+2l$ и зафиксируем некоторую решетку $L \subset K^n$. Пусть также P — композит поля разложения некоторого максимального тора $T \subset \tilde{G}$ и поля $K(Z)$, получаемого расширением K посредством элементов центра Z группы $\tilde{G}$. Выберем, исходя из теоремы плотности Чеботарева (см. [7], стр. 254), такие нормирования $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_d \in V_{(f)} \setminus U$, что $P \subset K_{\bar{v}_i}$ и

$$\psi_{K_{\bar{v}_j}}(G_{O_{\bar{v}_j}}^{L_{\bar{v}_j}}) = H^1(K_{\bar{v}_j}^{\text{нр}}/K_{\bar{v}_j}, F) \text{ для всех } j = 1, 2, \ldots, d.$$

(Напомним, что $\psi_{K_v}(G_{O_v}^{L_v}) = H^1(K_v^{\text{нр}}/K_v, F)$ для почти всех $v \in V_{(f)}$ (см. [1]).) Число d здесь определяется количеством сомножителей в разложении $B = \prod_{j=1}^{d} B_j$ заданной конечной абелевой группы B экспоненты f в прямое произведение своих примарных циклических подгрупп. Поскольку гомоморфизм

$$t: H^1(K, F) \to \prod_{j=1}^{d} H^1(K_{\bar{v}_j}, F) \times \prod_{v \in V_\infty} H^1(K_v, F)$$

сюръективен, группа G обладает свойством слабой аппроксимации относительно множества $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_d\}$. Действительно, из ([2]) следует, что односвязная группа $\tilde{G}$ всегда обладает свойством слабой аппроксимации. А тогда рассуждения типа леммы о пяти гомоморфизмах (см. ([10])) с использованием справедливости принципа Хассе для всех односвязных групп, не содержащих множителей типа E_8, показывают, что достаточным условием слабой аппроксимации для G относительно множества $S \supseteq V_\infty$ является сюръективность канонического гомоморфизма $t_S: H^1(K, F) \to \prod_{v \in S} H^1(K_v, F)$, где F — фундаментальная группа группы G.

Исходя из выбора нормирований $\bar{v}_j$ и принимая во внимание конечность всех групп $H^1(K_v, F)$ (см. ([5])), теперь нетрудно доказать существование такой конечнопорожденной подгруппы $\Gamma_0 \subset G_K$, что $\Gamma_0 \subset G_{O_{\bar{v}_j}}^{L_{\bar{v}_j}}$ для всех $j = 1, 2, \ldots, d$ и индуцированное отображение $t': \psi_K(\Gamma_0) \to \prod_{j=1}^{d} H^1(K_{\bar{v}_j}^{\text{нр}}/K_{\bar{v}_j}, F)$ сюръективно.

Установим, далее, существование конечного подмножества $S \subset \subset V_{(f)} \setminus \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_d\}$ и решетки $M \subset K^n$, для которых выполнены следующие условия:

(i) $\Gamma_0 \subset G_{O(S)}^M$ ($O(S)$ — кольцо S-целых элементов поля K);

(ii) $\psi_{K_v}(G_{O_v}^{M_v}) = H^1(K_v, F)$ для $v \in S$ и

$$\psi_{K_v}(G_{O_v}^{M_v}) = H^1(K_v^{\text{нр}}/K_v, F) \text{ для } v \in V_{(f)} \setminus S;$$

(iii) $\mathrm{cl}(G^M) = 1$.

Ясно, что существует такое конечное подмножество $S_1 \subset V_{(f)} \setminus \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_d\}$, что $\Gamma_0 \subset G_{O(S_1)}^L$. Далее, так как группа G обладает свойством слабой аппроксимации относительно множества $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_d\}$, то найдется конечное подмножество $S_2 \subset V_{(f)} \setminus \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_d\}$ и такая система представителей $\{z_j\}_{j=1}^r$ двойных смежных классов в разложении $G_A = \bigcup_{i=1}^{r} G_{A(\infty)}^L z_j G_K$, что v-компонента $(z_j)_v = 1$ для $v \notin S_2$ и всех $j = 1, 2, \ldots, r$. Наконец, пусть

$$S_3 = \{v \in V_{(f)} \mid \psi_{K_v}(G_{O_v}^{L_v}) \neq H^1(K_v^{\text{нр}}/K_v, F)\}.$$

Положим тогда $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ и определим решетку $M \subset K^n$ через ее локализации следующим образом:

$$M_v = \begin{cases} L_v, & v \notin S, \\ N_v, & v \in S, \end{cases} \tag{2}$$

где N_v — решетка из леммы 1. Решетка, удовлетворяющая (2), существует (см. ([9])). Убедимся теперь, что полученные таким образом S и M удовлетворяют всем требованиям пунктов (i) — (iii). Действительно, по построению $\Gamma_0 \subset G^{L}_{O(S)}$, т. е. $\Gamma_0 \subset G^{L_v}_{O_v}$ для $v \notin S$. Но, согласно (2), $L_v = M_v$ при $v \notin S$, откуда $\Gamma_0 \subset G^{M_v}_{O_v}$ для $v \notin S$, так что $\Gamma_0 \subset G^{M}_{O(S)}$; тем самым (i) доказано. Справедливость (ii) немедленно вытекает из способа построения решетки M; (iii) следует из выбора множества S_2 и рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 2 из ([1]) об одноклассных решетках. Отметим, что для почти всех v решетка M_v является прямой суммой своих проекций M'_v, M''_v на пространства K_v^m и K_v^{2l} соответственно. Поэтому, расширяя S, можно добиться того, чтобы $M_v = M'_v \oplus M''_v$ при всех $v \in V_{(f)} \setminus S$.

Пусть $\Omega = (\omega_i)$, $i = 1, \ldots, r+t$, — система морфизмов $\omega_i : T \to T_i$, построенная в § 2. Тогда, поскольку показатель F равен $f = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_s^{\beta_s}$, для любого индекса $j = 1, 2, \ldots, d$ и соответствующей подгруппы B_j порядка $[B_j] = p_{i_j}^{\gamma_{i_j}}$ $(\gamma_{i_j} \leqslant \beta_{i_j})$ существует такой индекс $l_j \in \{1, \ldots, r+t\}$, что группа $\overline{F}_{l_j} = \omega_{l_j}(F)$ циклическая порядка, делящегося на $p_{i_j}^{\beta_{i_j}}$. Действительно, если $p_{i_j}^{\beta_{i_j}} \neq 2$, то всегда существует проекция $\omega_{l_j} = \theta_{l_j}$ с требуемым свойством. Менее очевиден случай $p_{i_j}^{\beta_{i_j}} = 2$. Если по-прежнему для некоторого $l_j \in \{1, \ldots, r\}$ порядок $[\omega_{l_j}(F)]$ четен, причем группа $\widetilde{G}_{l_j}$ не является группой типа D_{2n}, то опять морфизм $\omega_{l_j} = \theta_{l_j}$ — искомый. Таким образом, нам осталось исследовать случай, когда порядок $[\omega_{l_j}(F)]$ четен лишь для некоторого $l_j \in \{1, \ldots, r\}$, обладающего свойством: группа $\omega_{l_j}(F)$ нециклична и, следовательно, компонента $\widetilde{G}_{l_j}$ имеет тип D_{2n}. Но тогда $\omega_{l_j}(F)$ в точности совпадает с центром $Z(\widetilde{G}_{l_j})$. (Напомним, что в рассматриваемой ситуации $Z(\widetilde{G}_{l_j})$ есть абелева группа типа (2,2).) Рассмотрим группу $\tau_{l_j}(F)$. Поскольку тор $H_{l_j} \subset T_{l_j}$ одномерен, причем пересечение $H_{l_j} \cap Z(\widetilde{G}_{l_j})$ нетривиально, группа $\overline{Z}_{l_j} = H_{l_j} \cap Z(\widetilde{G}_{l_j})$ является циклической группой второго порядка, а поэтому порядок $\omega_{r+l_j}(F) = \tau_{l_j}(F)$ также равен двум. Существование индекса l_j с требуемыми свойствами доказано.

Произведение $\prod\limits_{j=1}^{d} \omega_{l_j}$ очевидным образом индуцирует морфизм групп когомологий $\omega : H^1(P, F) \to \prod\limits_{j=1}^{d} H^1(P, \overline{F}_{l_j})$. Обозначим через $\tau : H^1(K, F) \to H^1(P, F)$ отображение ограничения и положим $\Gamma = \psi_K(\Gamma_0 G_O^M)$, $\Phi = (\omega \circ \tau)(\Gamma)$.

Предложение 2. *Для всякого конечного подмножества $\widetilde{S} \subset V_{(f)}$ существуют нормирования $v_1, v_2, \ldots, v_d \in V_{(f)} \setminus \widetilde{S}$ и нормирования w_1,*

$w_2, \ldots, w_d$ *поля* P, *обладающие свойствами*:

(i) $w_j \mid v_j$ *и* $P_{w_j} = K_{v_j}$ *для всех* $j = 1, 2, \ldots, d$;

(ii) $\gamma(\Phi) \subset \prod_{j=1}^{d} H^1(P_{w_j}^{\text{нр}}/P_{w_j}, \overline{F}_{l_j})$;

(iii) $\prod_{j=1}^{d} H^1(P_{w_j}^{\text{нр}}/P_{w_j}, \overline{F}_{l_j})/\gamma(\Phi) \simeq B$.

Здесь $\gamma: \prod_{j=1}^{d} H^1(P, \overline{F}_{l_j}) \to \prod_{j=1}^{d} H^1(P_{w_j}, \overline{F}_{l_j})$ *есть произведение соответствующих отображений ограничения.*

Доказательство. Расширяя при необходимости $\widetilde{S}$, можно считать (ii) выполненным для всех $w_1, w_2, \ldots, w_d$, лежащих над $v_1, v_2, \ldots, v_d \in V_{(f)} \setminus \widetilde{S}$. Для каждого $j = 1, 2, \ldots, d$ выберем такую циклическую подгруппу $\widetilde{F}_{l_j}$ группы F, что отображение $\omega_{l_j}: \widetilde{F}_{l_j} \to \overline{F}_{l_j}$ сюръективно, последнее возможно ввиду цикличности $\overline{F}_{l_j}$. Обозначим через $x_j \in \Gamma$ такой элемент, что $t'(x_j) = (1, \ldots, y_j, \ldots, 1)$, где y_j — образующая группы $H^1(P_{\overline{w}_j}^{\text{нр}}/P_{\overline{w}_j}, \widetilde{F}_{l_j})$ (напомним, что для $\overline{w}_j \mid \overline{v}_j$ имеем $P_{\overline{w}_j} = K_{\overline{v}_j}$, так что отображение $t': \Gamma \to \prod_{j=1}^{d} H^1(P_{\overline{w}_j}^{\text{нр}}/P_{\overline{w}_j}, F)$ сюръективно по построению). Заметим, что так как $F \subset G_{P_{\overline{w}_j}}$, то гомоморфизм

$$\overline{\alpha}_j: H^1(P_{\overline{w}_j}^{\text{нр}}/P_{\overline{w}_j}, \widetilde{F}_{l_j}) \to H^1(P_{\overline{w}_j}^{\text{нр}}/P_{\overline{w}_j}, \widetilde{F}_{l_j})$$

сюръективен, поэтому $\overline{\alpha}_j(y_j)$ порождает всю группу $H^1(P_{\overline{w}_j}^{\text{нр}}/P_{\overline{w}_j}, \overline{F}_{l_j})$ и, следовательно, имеет порядок $m_j = [\overline{F}_{l_j}]$.

Представим Γ в виде $\Gamma = \Gamma_j \oplus \langle x_j \rangle$, где $\Gamma_j = \operatorname{Ker} \eta_j \cap \Gamma$, $\eta_j = pr_j \circ \gamma \circ \omega \circ \tau$, $\langle x_j \rangle$ — циклическая подгруппа, порожденная x_j, и пусть R_j — поле разложения подгруппы Γ_j, т. е. минимальное расширение Галуа поля P, для которого образ Γ_j в $H^1(R_j, \overline{F}_{l_j})$ тривиален. Пусть также P_j — поле разложения подгруппы $\langle \alpha_j(\tau(x_j)) \rangle$, где $\alpha_j: H^1(P, F) \to H^1(P, \overline{F}_{l_j})$ —естественное отображение. Ясно, что $R_j \subset K_{\overline{v}_j}$ и $P_j K_{\overline{v}_j}$ является неразветвленным расширением поля $K_{\overline{v}_j}$ степени m_j для всех $j = 1, 2, \ldots, d$. Обозначим через K_j минимальное расширение Галуа поля K, содержащее композит $P_j R_j$, и пусть элемент $\sigma_j \in \operatorname{Gal}(K_j \mid K)$ индуцирует автоморфизм Фробениуса $\operatorname{Fr}(P_j K_{\overline{v}_j}/K_{\overline{v}_j})$. Тогда по теореме плотности Чеботарева (см. [7]) существует нормирование $v_j \in V_{(f)} \setminus \widetilde{S}$ такое, что $\operatorname{Fr}(K_j K_{\overline{v}_{j_1}} \mid K_{\overline{v}_j}) = \sigma_j^{m_j \backslash n_j}$, где $n_j = [B_j]$; отметим, что по построению число $m_j \mid n_j$ — целое.

Без ограничения общности можно считать, что все получаемые таким образом нормирования $v_1, v_2, \ldots, v_d$ различны. Пусть $w_1, w_2, \ldots, w_d$ —

их некоторые продолжения на P. Покажем, что они удовлетворяют всем требованиям предложения.

Свойство (i) заведомо выполнено, ибо σ_j действует тривиально на P. Далее, $\gamma(\Phi)=\prod_{j=1}^{d} C_j$, где C_j — подгруппа $H^1(P_{w_j}^{\text{нр}}/P_{w_j}, \overline{F}_{l_j})$ порядка $m_j \mid n_j$. Действительно, Γ может быть представлена в виде $\Gamma=\Gamma' \oplus \Gamma''$, где $\Gamma'=\bigcap_{j=1}^{d} \Gamma_j$, Γ'' порождена элементами $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Тогда $\gamma((\omega\circ\tau)(\Gamma'))=1$, так как $R_j \subset K_{v_j}$ для всех $j=1, 2, \ldots, d$. Поэтому

$$\gamma(\Phi)=\gamma((\omega\circ\tau)(\Gamma''))=\prod_{j=1}^{d}\langle\alpha_j(x_j)\rangle,$$

поскольку по построению $x_i \in \Gamma_j$ при $i \neq j$. Наконец, порядок $\operatorname{ord}\alpha_j(x_j)$ в группе $H^1(P_{w_j}^{\text{нр}}/P_{w_j}, \overline{F}_{l_j})$ равен, очевидно, степени $[P_jK_{v_j} : K_{v_j}]=m_j/n_j$.

Подводя итоги, мы видим, что

$$\prod_{j=1}^{d} H^1(P_{w_j}^{\text{нр}}/P_{w_j}, \overline{F}_{l_j})/\gamma(\Phi)=\prod_{j=1}^{d}(H^1(P_{w_j}^{\text{нр}}/P_{w_j}, \overline{F}_{l_j})/C_j)\simeq B.$$

Предложение 2 доказано.

Пусть нормирования $v_1, v_2, \ldots, v_d$ выбраны в соответствии с предложением 2 для $\tilde{S}=S\cup S'$, где S' — исключительное подмножество в предложении 1. Зададим тогда локальные компоненты искомой решетки N следующим образом:

$$N_v=\begin{cases} M_v, & v \notin S_d, \\ M_{v_j}(l_j), & v=v_j \in S_d, \end{cases}$$

где $S_d=\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$, $M_{v_j}(l_j)=M'_{v_j}\oplus M_{v_j}^{l_j}$, $M_{v_j}^{l_j}$ — решетка из предложения 1.

Доказательство теоремы 1 завершает

Предложение 3. $\mathcal{G}\mathrm{cl}(G^N)\simeq B$.

Доказательство предложения 3 базируется на следующей лемме.

ЛЕММА 3. *Пусть X — такая подгруппа G_K, что $G_O^M \subset X \subset G_{O(S)}^M$. Тогда*

$$\mathcal{G}\mathrm{cl}(G^N)\simeq\psi\left(\prod_{j=1}^{d} G_{O_{v_j}}^{M_{v_j}}\right)/\psi\left(\delta(X)\prod_{j=1}^{d} G_{O_{v_j}}^{N_{v_j}}\right),$$

где $\psi=\prod_{j=1}^{d}\psi_{K_{v_j}}$, $\delta: G_K \to \prod_{j=1}^{d} G_{v_j}^{M}$ — *диагональное вложение.*

Доказательство. Обозначим через Σ подгруппу G_A, состоящую из аделей $a(g_1, g_2, \ldots, g_d)$ с локальными компонентами

$$a(g_1, g_2, \ldots, g_d)_v=\begin{cases} 1, & v \notin S_d, \\ g_j, & v=v_j \in S_d \end{cases}$$

$(g_j \in G_{O_{v_j}}^{M_{v_j}})$. Тогда $G_{A(\infty)}^M = \Sigma G_{A(\infty)}^N$, так что

$$\mathcal{G}\,\mathrm{cl}\,(G^N) = G_A/G_{A(\infty)}^N G_K \simeq \Sigma/(\Sigma \cap G_{A(\infty)}^N G_K).$$

Для доказательства леммы мы установим, что композиция ψ и естественной проекции Σ на $\prod_{j=1}^{d} G_{O_{v_j}}^{M_{v_j}}$ индуцирует изоморфизм групп $\Sigma/(\Sigma \cap G_{A(\infty)}^N G_K)$ и $\psi\left(\prod_{j=1}^{d} G_{O_{v_j}}^{M_{v_j}}\right)/\psi\left(\delta(X)\prod_{j=1}^{d} G_{O_{v_j}}^{N_{v_j}}\right)$. Корректность этого отображения нетрудно установить, воспользовавшись включением $G_O^M \subset X$. Так как сюръективность очевидна, то проверим инъективность. Пусть $a(g_1, g_2, \ldots, g_d) \in G_A$ и обладает свойством

$$\psi((g_1, g_2, \ldots, g_d)) = \psi(\delta(x)(h_1, h_2, \ldots, h_d)),$$
$$x \in X, \quad h_j \in G_{O_{v_j}}^{N_{v_j}} \quad (j = 1, \ldots, d).$$

Поскольку класс $G_{A(\infty)}^N G_K$ является подгруппой группы G_A, содержащей $\mathrm{Ker}\,\Psi_A = \mathrm{Im}\,\Pi_A$ (см. ([1])), то для доказательства включения $a(g_1, g_2, \ldots, g_d) \in G_{A(\infty)}^N G_K$ достаточно установить принадлежность главному классу аделей $g = (g_v)_{v \in V}$ с локальными компонентами

$$g_v = \begin{cases} 1, & v \notin S_d, \\ x, & v \in S_d, \end{cases}$$

где $x \in X$. Но адель gx^{-1} может быть представлен в виде $gx^{-1} = abc$, где локальные компоненты аделей a, b, c следующие:

$$a_v = \begin{cases} 1, & v \in S \cup S_d, \\ x^{-1}, & v \notin S \cup S_d \end{cases}; \quad b_v = \begin{cases} \beta_v, & v \in S, \\ 1, & v \notin S \end{cases};$$
$$c_v = \begin{cases} \pi_v(\gamma_v), & v \in S, \\ 1, & v \notin S, \end{cases}$$

причем элементы $\beta_v \in G_{O_v}^{M_v} = G_{O_v}^{N_v}$, $\gamma_v \in \widetilde{G}_v$ $(v \in S)$ выбраны таким образом, чтобы $\beta_v \pi_v(\gamma_v) = x^{-1}$, что возможно в силу выбора M. Тогда $a, b \in G_{A(\infty)}^N$, $c \in \Pi_A(\widetilde{G}_A)$, так что из неопределенности G вытекает включение $gx^{-1} \in G_{A(\infty)}^N G_K$, откуда и $g \in G_{A(\infty)}^N G_K$. Лемма 3 доказана.

Доказательство предложения 3. Используем лемму 3 для случая, когда X есть подгруппа, порожденная Γ_0 и G_O^M. Тогда

$$\mathcal{G}\,\mathrm{cl}\,(G^N) \simeq \prod_{j=1}^{d} H^1(K_{v_j}^{\text{нр}}/K_{v_j}, F)/t'(\Gamma) \prod_{j=1}^{d} D_j,$$

где $D_j = \psi_{K_{v_j}}(G_{O_{v_j}}^{N_{v_j}})$. Покажем, что

$$D_j = H^1(K_{v_j}^{\text{нр}}/K_{v_j}, F) \cap \mathrm{Ker}\,(\omega_j)_{K_v}.$$

Действительно, по построению $G_{O_{v_j}}^{N_{v_j}} = \{x \in G_{O_{v_j}}^{M'_{v_j}} \mid \rho(x) \in \bar{G}_{O_{v_j}}^{M_{v_j}^{l_j}}\}$. Поэтому, так как $\bar{\psi}_{K_{v_j}}(G_{O_{v_j}}^{M_{v_j}^{l_j}}) = \operatorname{Ker}(\omega_{l_j})_{K_{v_j}}$,

$$\psi_{K_{v_j}}(G_{O_{v_j}}^{N_{v_j}}) \subset H^1(K_{v_j}^{\text{нр}}/K_{v_j}, F) \cap \operatorname{Ker}(\omega_{l_j})_{K_{v_j}}.$$

Обратное включение следует из того, что уже

$$\psi_{K_{v_j}}(T_{0O_{v_j}}^{N_{v_j}}) = H^1(K_{v_j}^{\text{нр}}/K_{v_j}, F) \cap \operatorname{Ker}(\omega_{l_j})_{K_{v_j}},$$

где $T_0 = \pi(T)$ — максимальный тор в G.

Из доказанного следует, что произведение $\prod_{j=1}^{d} \omega_{l_j}$ индуцирует изоморфизм

$$\mathscr{G}\operatorname{cl}(G^N) \simeq \prod_{j=1}^{d} H^1(K_{v_j}^{\text{нр}}/K_{v_j}, \bar{F}_{l_j})/\gamma(\Phi),$$

последняя же группа по построению изоморфна B. Предложение 3, а значит, и теорема 1 доказаны.

Разработанные в ([1]) и § 3 настоящей статьи методы вычисления групп и чисел классов полупростых неопределенных алгебраических групп позволяют решить ряд классических задач о вычислении числа классов в роде решеток на пространствах с заданным действием алгебраической группы. Мы разберем здесь в качестве примера задачу о вычислении числа классов в роде решеток на полной матричной алгебре относительно сопряженности. Две решетки $L_1, L_2 \subset M_n(K)$ называются принадлежащими одному роду, если их локализации L_{1v} и L_{2v} сопряжены при помощи матрицы из $GL_n(K_v)$ для всех неархимедовых нормирований v поля K, и одному классу, если они сопряжены при помощи матрицы из $GL_n(K)$. Из теоремы конечности для числа двойных классов (см. ([11])) нетрудно получить конечность числа $c(L)$ классов в роде произвольной решетки $L \subset M_n(K)$. Требуется получить описание чисел $c(L)$.

Исчерпывающий ответ на этот вопрос дает

Предложение 4. *Пусть $n = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_r^{\gamma_r}$ — каноническое разложение числа n. Тогда для любой решетки $L \subset M_n(K)$ число $c(L)$ имеет вид $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$, и обратно, для любого числа $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$ существует такая решетка $L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r) \subset M_n(K)$, что $c(L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$.*

Доказательство. Действие $GL_n(\Omega)$ на $W = M_n(\Omega)$ посредством сопряжения индуцирует точное представление группы $G = PSL_n(\Omega)$ в $GL(W) = GL_{n^2}(\Omega)$, причем для любой решетки $L \subset M_n(K)$ $c(L) = \operatorname{cl}(G^L)$. Таким образом, задача вычисления $c(L)$ свелась к подсчету числа классов для проективной группы. В § 4 работы ([1]) соответствующие вычисления были проведены для решеток на пространстве $K^{2(n^2-1)}$. Анализ приведенных там рассуждений показывает, что все вычисления без каких-либо изменений переносятся в нашу ситуацию, если только известна конструкция локальных решеток, стабилизатор которых содержится в конгруэнц-подгруппе стабилизатора исходной решетки. Поэтому все, что еще нужно доказывать, сосредоточено в следующем утверждении.

ЛЕММА 4. *Существует конечное подмножество $S\subset V_{(f)}$ такое, что для $v\in V_{(f)}\setminus S$ найдется решетка $N_v\subset W_v$, для которой $G_{O_v}^{N_v}\subset G_{O_v}^{L_v}$ $(\mathfrak{p}_v)$, где L—O-решетка, натянутая на стандартный базис e_{ij} матричной алгебры.*

Доказательство. Представим W в виде $W=W_0\oplus W_1$, где $W_0=\{a\in W\,|\,\mathrm{Tr}(a)=0\}$ ($\mathrm{Tr}(a)$ — след матрицы a), W_1— подпространство скалярных матриц. Нетрудно показать, что квадратичная форма $f(x)=\mathrm{Tr}(x^2)$ на W является невырожденной. Так как пространства W_0 и W_1 ортогональны относительно f, то ограничение f_0 формы f на W_0 также невырождено. Пусть $w_1, w_2, \ldots, w_m$ $(m=n^2-1)$ — базис пространства W_{0K}, в котором форма f_0 имеет канонический вид $f_0=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i x_i^2$, и пусть w_{m+1}— ненулевой вектор из W_{1K}. Обозначим через $\tilde{L}$ O-решетку с базисом $w_1, w_2, \ldots, w_{m+1}$ и возьмем в качестве исключительного подмножества S объединение $S_1\bigcup S_2$, где $S_1=\{v\in V_{(f)}\,|\,L_v\neq\tilde{L}_v\}$, $S_2=\{v\in V_{(f)}\,|\,v(\varphi_i)\neq\neq 1$ для хотя бы одного $i=1, 2, \ldots m\}$.

Предположим теперь, что $v\in V_{(f)}\setminus S$. Тогда $L_v=\tilde{L}_v$, так что $G_{O_v}^{L_v}=G_{O_0}^{\tilde{L}_v}$ и $G_{O_v}^{L_v}(\mathfrak{p}_v)=G_{O_v}^{\tilde{L}_v}(\mathfrak{p}_v)$. Покажем, что в качестве искомой решетки N_v можно взять O_v-решетку с базисом $w_1+\pi_v^{-m}w_{m+1}, \ldots, \pi_v^{(j-1)}w_j+\pi_v^{(j-m-1)}w_{m+1}, \ldots$ $\ldots, \pi_v^{(m-1)}w_m+\pi_v^{-1}w_{m+1}, w_{m+1}$, где π_v — униформизующий элемент. Пусть $x\in G_{O_v}^{N_v}$ и $x=(x_{ij})$ в базисе $w_1, w_2, \ldots, w_{m+1}$. Поскольку пространство $W_{\mathcal{A}}^{v}$ и форма f_0 инвариантны относительно G, матрица x имеет вид

$$x=\begin{pmatrix} x^0 & & 0\\ & & \vdots\\ & & 0\\ 0 & \ldots\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

где x^0— ортогональная матрица степени m относительно формы f_0. Тогда имеем:

$$x(\pi_v^{(j-1)}w_j+\pi_v^{(j-m-1)}w_{m+1})=\pi_v^{(j-1)}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^0 w_i+\pi_v^{(j-m-1)}w_{m+1}=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^j(\pi_v^{(i-1)}w_i+\pi_v^{(i-m-1)}w_{m+1})+\alpha_{m+1}^j w_{m+1},$$

откуда

$$x_{ij}^0=\pi_v^{(i-j)}\alpha_i^j\quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

$$\alpha_{m+1}^{j}=\pi_v^{(j-m-1)}\left[(1-\alpha_j^j)-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\pi_v^{(i-j)}\alpha_i^j\right].$$

Так как $x(N_v)=N_v$, то все коэффициенты α_i^j $(i=1, 2, \ldots, m+1)$ должны принадлежать O_v, поэтому $x_{ij}^0\in\mathfrak{p}_v^{(i-j)}$ при $i>j$. Но поскольку матрица x^0 ортогональна, т. е. ${}^t x^0=\varphi^{-1}(x^0)^{-1}\varphi$, где $\varphi=\operatorname{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, то $x_{ij}^0\in\in\mathfrak{p}_v^{(j-i)}$ и при $i<j$. Действительно, матрица $y=x^{-1}$, очевидно, принадлежит $G_{O_v}^{N_v}$, поэтому для соответствующей матрицы y^0 имеем: $y_{ij}^0\in\mathfrak{p}_v^{(i-j)}$ при $i>j$. С другой стороны, $x_{ij}^0=\varphi_i^{-1}\varphi_j y_{ij}^0$, так что при $i<j$ $x_{ij}^0=\varphi_i^{-1}\varphi_j y_{ji}^0\in\mathfrak{p}_v^{(j-i)}$. Таким образом, во всех случаях $x_{ij}^0\in\mathfrak{p}_v^{|i-j|}$. Тогда $\alpha_i^j=\pi_v^{(j-i)}x_{ij}^0\in\mathfrak{p}_v^{2(j-i)}$ при $i<j$. Поэтому сумма $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\pi_v^{(i-j)}\alpha_i^j$ принадлежит $\mathfrak{p}_v$, откуда для $x_{jj}^0=\alpha_j^j=$ $=1-\left(\pi_v^{(m+1-j)}\alpha_{m+1}^j+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\pi_v^{(i-j)}\alpha_i^j\right)$ выполняется сравнение $x_{jj}^0\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_v}$.

Лемма 4 доказана.

§ 4. О существовании групповой структуры в главном классе

В предыдущем параграфе нами было получено исчерпывающее описание значений числа $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ при всевозможных K-реализациях φ для произвольной полупростой неопределенной группы G. Решающую роль при этом играет тот факт, что класс $\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K$ является подгруппой, содержащей коммутант группы $\varphi(G)_A$, и $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ представляет порядок абелевой группы

$$\varphi(G)_A/\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K=\mathcal{G}\mathrm{cl}(\varphi(G)),$$

которую мы назвали в ([1]) группой классов. Оказывается, что наличие групповой структуры в классе $\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K$ накладывает жесткие ограничения на число классов: $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ должно быть делителем $[F]^d$. Для формулировки точного результата напомним, что $\Psi_A=\prod_{v\in V}\psi_{K_v}$, где $\psi_{K_v}: G_{K_v}\to H^1(K_v, F)$ — кограничный морфизм.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть φ — такая реализация полупростой K-определенной группы G, что главный класс $\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K$ является подгруппой группы $\varphi(G)_A$. Тогда число классов $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ может быть вычислено по формуле*

$$\mathrm{cl}(\varphi(G))=[\Psi_A(\varphi(G)_A):\Psi_A(\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K)];\qquad(1)$$

в частности, $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ *является делителем числа вида* $[F]^d$, $d\geqslant 0$.

Доказательство. Вместо $\varphi(G)$ будем писать просто G. Анализ доказательства предложения 1 из ([1]) показывает, что формула (1) имеет место всякий раз, когда

$$\Pi_A(\widetilde{G}_A) \subset G_{A(\infty)}G_K. \tag{2}$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить справедливость включения (2) при условии, что главный класс $G_{A(\infty)}G_K$ является подгруппой в G_A.

Для $v_0 \in V_{(f)}$, $\alpha \in G_{v_0}$ обозначим через $x^{v_0}(\alpha)$ адель с компонентами

$$\bar{x}_v = \begin{cases} 1, & v \neq v_0, \\ \alpha, & v = v_0. \end{cases}$$

Тогда (2) эквивалентно тому, что $x^v(\pi_v(\beta)) \in G_{A(\infty)}G_K$ для всякого $v \in V_{(f)}$, $\beta \in \widetilde{G}_v$.

Из конечности числа классов легко следует, что индекс $[G_A : G_{A(\infty)}G_K]$ конечен. Пусть u — унипотентный элемент в G_v, U — содержащая его однопараметрическая подгруппа. Тогда $x^v(U_v)$ является полной абелевой группой, поэтому $x^v(U_v) \subset G_{A(\infty)}G_K$. Если G_v — некомпактная группа, то из справедливости для $\widetilde{G}_v$ гипотезы Кнезера — Титса (см. ([2]), ([3])) следует, что группа $\pi_v(\widetilde{G}_v)$ порождается унипотентными элементами в G_v. С учетом отмеченного выше факта это доказывает включение $x^v(\pi_v(\beta)) \in G_{A(\infty)}G_K$ для любого $\beta \in \widetilde{G}_v$.

В общем случае обозначим через $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ множество всех тех v, для которых группа G_v компактна (это множество конечно) и для $g = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \prod_{i=1}^{u} G_{v_i}$ пусть $x^S(g)$ — адель с компонентами

$$x_v = \begin{cases} 1, & v \notin S, \\ \alpha_i, & v = v_i \in S. \end{cases}$$

Мы покажем, что $x^S(g) \in G_{A(\infty)}G_K$ при произвольном $g \in \prod_{i=1}^{r} \pi_{v_i}(\widetilde{G}_{v_i})$. Известно ([2]), что $\widetilde{G}$ обладает свойством слабой аппроксимации относительно S, т. е. $\widetilde{G}_K$ плотно в произведении $\prod_{i=1}^{r} \widetilde{G}_{v_i}$. Тогда и $\pi_K(\widetilde{G}_K)$ плотно в $\prod_{i=1}^{r} \pi_{v_i}(\widetilde{G}_{v_i})$, и, учитывая замкнутость $G_{A(\infty)}G_K$ в адельной топологии, мы видим, что достаточно доказать включение $x^S(g) \in G_{A(\infty)}G_K$ лишь когда g имеет вид $g = (\pi(\beta), \ldots, \pi(\beta))$, $\beta \in \widetilde{G}_K$. Но тогда $x^S(g)\pi(\beta)^{-1}$ имеет единичные проекции на G_v для всех $v \in S$, и, согласно первой части доказательства, $x^S(g)\pi(\beta)^{-1} \in G_{A(\infty)}G_K$, поэтому и $x^S(g) \in G_{A(\infty)}G_K$. Теорема 2 доказана.

§ 5. Группы компактного типа

Напомним, что полупростая алгебраическая группа G называется группой компактного типа, если для некоторого почти прямого сомножителя G^i группы G архимедова часть G^i_∞ компактна. Всюду в этом параграфе, если не оговорено противное, через G обозначается полупростая алгебраическая K-группа степени n, имеющая компактный тип.

Как уже отмечалось, проблема вычисления $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ представляется малореальной, ибо для рассматриваемых групп число классов может принимать весьма разнообразные значения, никак априори не связанные с бирациональными инвариантами G. На самом деле для групп компактного типа справедлив следующий общий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть G — полупростая алгебраическая группа компактного типа и степени n. Тогда для любого натурального r существует такая решетка $M(r)\subset K^{2n}$, что $\mathrm{cl}(G^{M(r)})$ делится на r.*

Зафиксируем некоторую решетку $L\subset K^n$ и там, где это не может привести к недоразумениям, группу $G^L_{A(\infty)}$ будем обозначать просто через $G_{A(\infty)}$. Положим также для всякого $v_0\in V_{(f)}$

$$G_{A(\infty)}(v_0)=\prod_{v\in V_\infty} G_v\times\prod_{\substack{v\in V_{(f)}\\ v\neq v_0}} G_{O_v}\times G_{O_{v_0}}(\mathfrak{p}_{v_0}),$$

где $G_{O_{v_0}}(\mathfrak{p}_{v_0})$ — конгруэнц-подгруппа $G_{O_{v_0}}$ уровня $\mathfrak{p}_{v_0}$.

Пусть $c(G, v_0)$ — соответствующее число двойных классов $G_{A(\infty)}(v_0)\diagdown \diagdown G_A | G_K$. Вместо теоремы 3 нами будет доказан следующий несколько более точный результат: для любого натурального числа r существует такое $v_0\in V_{(f)}$, что $c(G, v_0)$ делится на r. Теорема 3 очевидным образом вытекает из этого утверждения, если учесть, что в соответствии с предложением 2 работы ([1]) существует решетка $N\subset K^{2n}$, для которой $G^N_{A(\infty)} = G_{A(\infty)}(v_0)$.

Доказательство теоремы 3 естественным образом разбивается на несколько шагов. Вначале нами будет получена формула, позволяющая выразить $c(G, v_0)$ через некоторые групповые индексы (лемма 5). Затем, пользуясь этим результатом, мы докажем теорему 3 для случая, когда архимедова часть G_∞ компактна для всей группы G (лемма 6).

Приводимые здесь рассуждения очень прозрачны и полностью вскрывают механизм доказательства теоремы 3 в общем случае. Завершает доказательство редукция случая произвольной группы компактного типа к уже рассмотренному случаю группы с компактной архимедовой частью группы аделей.

Пусть $G_A=\bigcup\limits_{i=1}^{m} G_{A(\infty)}z_iG_K$ — разложение G_A в объединение непересекающихся двойных смежных классов. Без ограничения общности можно считать, что существует такое конечное подмножество $T\subset V_{(f)}$, что v-компонента $(z_i)_v=1$ для всех $v\notin T$ и всех $i=1, 2, \ldots, m$. Обозначим через $G_O^{(i)}$ пересечение $z_i^{-1}G_{A(\infty)}z_i\cap G_K$ и положим $G_O^{(i)}(\mathfrak{p}_{v_0})=G_O^{(i)}\cap G_{O_{v_0}}(\mathfrak{p}_{v_0})$. Пусть также $c_i(G, v_0)$ — число двойных смежных классов по подгруппам $G_{A(\infty)}(v_0)$ и G_K, на которые распадается класс $G_{A(\infty)}z_iG_K$.

ЛЕММА 5.

$$c(G, v_0)=\sum_{i=1}^{m} c_i(G, v_0), \tag{1}$$

причем при $v_0 \in V_{(f)} \setminus T$

$$c_i(G, v_0) = \frac{[G_{O_{v_0}} : G_{O_{v_0}}(\mathfrak{p}_{v_0})]}{[G_O^{(i)} : G_O^{(i)}(\mathfrak{p}_{v_0})]}. \tag{2}$$

Доказательство. Формула (1) очевидна, поэтому установим справедливость формулы (2). Обозначим через $x^{v_0}(\alpha)$ адель с компонентами

$$x_v = \begin{cases} 1, & v \neq v_0, \\ \alpha, & v = v_0. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, имеем:

$$G_{A(\infty)} z_i G_K = \bigcup_{\alpha \in G_{O_{v_0}}} G_{A(\infty)}(v_0)\, x^{v_0}(\alpha)\, z_i G_K.$$

Пусть теперь для $\alpha, \beta \in G_{O_{v_0}}$ соответствующие смежные классы совпадают, т. е.

$$G_{A(\infty)}(v_0)\, x^{v_0}(\alpha)\, z_i G_K = G_{A(\infty)}(v_0)\, x^{v_0}(\beta)\, z_i G_K. \tag{3}$$

Учитывая перестановочность $x^{v_0}(\alpha)$ и z_i, из (3) получаем, что $x^{v_0}(\alpha) = a x^{v_0}(\beta) b$, где $a \in z_i^{-1} G_{A(\infty)}(v_0) z_i$, $b \in G_K$. Далее, так как $x^{v_0}(\alpha)$, $a x^{v_0}(\beta) \in z_i^{-1} G_{A(\infty)}(v_0) z_i$, то $b \in G_O^{(i)}$. Переходя теперь к проекциям на $G_{O_{v_0}}$, получим $\alpha = a_{v_0} \beta b$, где $a_{v_0} \in G_{O_{v_0}}(\mathfrak{p}_{v_0})$. Легко видеть, что верно и обратное: если α и β связаны соотношением $\alpha = x\beta y$ при $x \in G_{O_{v_0}}(\mathfrak{p}_{v_0})$, $y \in G_O^{(i)}$, то выполняется равенство (3). Принимая теперь во внимание тот факт, что $G_{O_{v_0}}(\mathfrak{p}_{v_0})$ является нормальным делителем в $G_{O_{v_0}}$, мы можем заключить, что (3) равносильно включению $\beta^{-1}\alpha \in G_O^{(i)} G_{O_{v_0}}(\mathfrak{p}_{v_0})$. Таким образом,

$$c_i(G, v_0) = [G_{O_{v_0}} : G_O^{(i)} G_{O_{v_0}}(\mathfrak{p}_{v_0})],$$

откуда (2) получается путем формальных манипуляций с групповыми индексами. Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. *Пусть G — полупростая алгебраическая группа с компактной архимедовой частью группы аделей. Тогда для всякого натурального r существует $v_0 \in V_{(f)}$ такое, что все числа $c_i(G, v_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ делятся на r. В частности, $c(G, v_0)$ делится на r.*

Доказательство. В силу компактности G_∞ все группы $G_O^{(i)}$ конечны; обозначим через d наименьшее общее кратное их порядков $[G_O^{(1)}]$, $[G_O^{(2)}]$, ..., $[G_O^{(m)}]$ и положим $r_1 = dr$. Очевидно, группа $G_{\bar{K}}$ содержит циклическую подгруппу C порядка r_1. Тогда из теоремы плотности Чеботарева вытекает, что множество $S = \{v \in V_{(f)} \mid C \subset G_{O_v}\}$ бесконечно. Поэтому существует $v_0 \in S \setminus T$, для которого ограничение на C отображения редукции по модулю $\mathfrak{p}_{v_0}$ инъективно. В этом случае фактор-группа $G_{O_{v_0}} / G_{O_{v_0}}(\mathfrak{p}_{v_0})$ содержит циклическую подгруппу порядка r_1, так что индекс $[G_{O_{v_0}} : G_{O_{v_0}}(\mathfrak{p}_{v_0})]$ делится на r_1.

Но тогда для любого $i=1, 2, \ldots, m$ число

$$c_i(G, v_0)=\frac{[G_{O_{v_0}}:G_{O_{v_0}}(\mathfrak{p}_{v_0})]}{[G_O^{(i)}:G_O^{(i)}(\mathfrak{p}_{v_0})]}$$

делится на r. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3 для произвольной полупростой алгебраической K-группы G компактного типа. Из определения таких групп вытекает, что G представляется в виде почти прямого произведения полупростых групп F и H, причем архимедова часть H_∞ компактна. Положим $S=G/F$ и обозначим через $\pi: G\to S$ соответствующий фактор-морфизм. Зафиксируем некоторую реализацию группы S таким образом, чтобы $\Pi_A(G_{A(\infty)})\subset S_{A(\infty)}$. Пусть $s_i=\Pi_A(z_i)$ и $S_O^{(i)}=s_i^{-1}S_{A(\infty)}s_i\cap S_K$. Число двойных классов $S_{A(\infty)}(v_0)\diagdown S_A\diagup S_K$, на которые распадается класс $S_{A(\infty)}s_iS_K$, обозначим через $c_i(S, v_0)$. Наша цель — установить связь между делимостью $c_i(G, v_0)$ и $c_i(S, v_0)$ на некоторое заданное число.

ЛЕММА 7. *Существует такое натуральное d, что если $c_i(S, v_0)$ делится на dr, то $c_i(G, v_0)$ делится на r для всех $i=1, 2, \ldots, m$ и всякого $v_0\in V_{(f)}\diagdown T$, где T — некоторое конечное множество неархимедовых нормирований поля K.*

Доказательство. Числа $c_i(G, v_0)$ и $c_i(S, v_0)$ могут быть вычислены по формуле, аналогичной (2). Преобразуем (2), воспользовавшись равенством $[A:B]=[\tau(A):\tau(B)][\operatorname{Ker}\tau:\operatorname{Ker}\tau\cap B]$, справедливым для любого нормального делителя B (абстрактной) группы A и любого гомоморфизма τ группы A в некоторую группу. Тогда получим:

$$c_i(G, v_0)=c_i(F, v_0)\frac{[\pi_{v_0}(G_{O_{v_0}}):\pi_{v_0}(G_{O_{v_0}}(\mathfrak{p}_{v_0}))]}{[\pi_K(G_O^{(i)}):\pi_K(G_O^{(i)}(\mathfrak{p}_{v_0}))]}, \tag{4}$$

где

$$c_i(F, v_0)=\frac{[F_{O_{v_0}}:F_{O_{v_0}}(\mathfrak{p}_{v_0})]}{[F_O^{(i)}:F_O^{(i)}(\mathfrak{p}_{v_0})]},\qquad F_O^{(i)}=F\cap G_O^{(i)}.$$

Ввиду связности F, адельное отображение $\Pi_A: G_A\to S_A$ является открытым (см. [6]), откуда моментально следует, что для почти всех $v\in V_{(f)}$ $\pi_v(G_{O_v})=S_{O_v}$. Покажем теперь, что почти всех v выполняется также и равенство

$$\pi_v(G_{O_v}(\mathfrak{p}_v))=S_{O_v}(\mathfrak{p}_v).$$

Известно (см. [8]), что существует такое конечное подмножество $T_1\subset V_{(f)}$, что при $v\in V_{(f)}\diagdown T_1$ группы F, G, S имеют гладкую редукцию по модулю $\mathfrak{p}_v$, которую обозначим соответственно через $\underline{F}$, $\underline{G}$, $\underline{S}$. Точная последовательность $1\to F\to G\to S\to 1$ для $v\in V_{(f)}\diagdown T_1$ индуцирует следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccc} F_{O_v} & \to & G_{O_v} & \xrightarrow{\pi_v} & S_{O_v} \\ \alpha_1\downarrow & & \alpha_2\downarrow & & \alpha_3\downarrow \\ \underline{F}_{k_v} & \to & \underline{G}_{k_v} & \to & \underline{S}_{k_v} \end{array}$$

где α_i ($i=1, 2, 3$) — отображения редукции по модулю $\mathfrak{p}_v$, $k_v=O_v/\mathfrak{p}_v$ — соответствующее поле вычетов. Тогда требуемое равенство $\pi_v(G_{O_v}(\mathfrak{p}_v))=S_{O_v}(\mathfrak{p}_v)$ можно записать в виде $\pi_v(\operatorname{Ker}\alpha_2)=\operatorname{Ker}\alpha_3$, после чего оно становится автоматическим следствием сюръективности π_v и α_2.

Далее, легко видеть, что подгруппа $G_O^{(i)}$ арифметична в G, поэтому по теореме Бореля (см. ([12])) подгруппа $\pi_K(G_O^{(i)})$ арифметична в S, так что индекс $n_i=[S_O^{(i)}:\pi_K(G_O^{(i)})]$ конечен (включение $\pi_K(G_O^{(i)})\subset S_O^{(i)}$ следует из включения $\Pi_A(G_{A(\infty)})\subset S_{A(\infty)}$ и определений). С учетом этих замечаний равенство (4) может быть переписано следующим образом:

$$c_i(G, v_0)=c_i(S, v_0)\,c_i(F, v_0)\frac{n_i}{r_i},$$

где

$$r_i=[S_O^{(i)}(\mathfrak{p}_{v_0}):\pi_K(G_O^{(i)}(\mathfrak{p}_{v_0}))].$$

Индекс r_i, очевидно, равен

$$[S_O^{(i)}(\mathfrak{p}_{v_0}):S_O^{(i)}(\mathfrak{p}_{v_0})\cap\pi_K(G_O^{(i)})]\,[S_O^{(i)}(\mathfrak{p}_{v_0})\cap\pi_K(G_O^{(i)}):\pi_K(G_O^{(i)}(\mathfrak{p}_{v_0}))].$$

В этом произведении первый индекс не превосходит n_i и поэтому является делителем $(n_i)!$. Производя, далее, формальные вычисления с групповыми индексами, которые мы опускаем, можно показать, что второй индекс делит $(d_i[Z])!$, где $d_i=[G_O^{(i)}:H_O^{(i)}F_O^{(i)}]$, $[Z]$ — порядок пересечения $F\cap H$. Отсюда видно, что в качестве искомого числа d достаточно взять наименьшее общее кратное чисел $(n_1-1)!\ (d_1[Z])!, \ldots$ $\ldots, (n_m-1)!\ (d_m[Z])!$, расширяя исключительное подмножество с T до $T\cup T_1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3 теперь непосредственно следует из лемм 5—7.

Следствие 1. *Если G — полупростая группа компактного типа, то существует бесконечное множество таких ее K-реализаций φ, что класс $\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K$ не является подгруппой в $\varphi(G)_A$.*

Действительно, если $\operatorname{cl}(\varphi(G))$ не делит $[F]^d$, $d\geqslant 0$, то $\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K$ не является подгруппой.

Следствие 2. *Для полупростой группы G главный класс $\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K$ является подгруппой группы $\varphi(G)_A$ для всех реализаций φ тогда и только тогда, если группа G — некомпактного типа, и только для таких полупростых групп число $\operatorname{cl}(\varphi(G))$ является делителем $[F]^d$, $d\geqslant 0$, для всех φ (здесь $[F]$ — порядок фундаментальной группы F для группы G).*

Поступило
13.XI.1979

Литература

[1] **Платонов В. П., Бондаренко А. А., Рапинчук А. С.,** Числа и группы классов алгебраических групп, Изв. АН СССР. Сер. матем., 43 (1979), 603—627.

[2] **Платонов В. П.,** Проблема сильной аппроксимации и гипотеза Кнезера — Титса для алгебраических групп, Изв. АН СССР. Сер. матем., 33 (1969), 1211—1220.

[3] **Платонов В. П.**, Дополнение к работе «Проблема сильной аппроксимации и гипотеза Кнезера — Титса для алгебраических групп», Изв. АН СССР. Сер. матем., 34 (1970), 775—777.

[4] **Титс Ж.**, Классификация полупростых алгебраических групп, «Математика», 12, № 2 (1968), 110—143.

[5] **Серр Ж.-П.**, Когомологии Галуа, М., «Мир», 1968.

[6] Арифметические группы и автоморфные функции, М., «Мир», 1969.

[7] Алгебраическая теория чисел, М., «Мир», 1969.

[8] **Вейль А.**, Адели и алгебраические группы, «Математика», 8, № 4 (1964), 3—74.

[9] **O'Meara O. T.**, Introduction to quadratic forms, Berlin — Heidelberg — New York, 1963.

[10] **Kneser M.**, Schwache Approximation in algebraischen Gruppen, Coll. Groupes Algerbriques, Paris (1962), 41—52.

[11] **Borel A.**, Some finiteness properties of adele groups over number fields, Publ. Math. IHES, № 16 (1963), 101—126.

[12] **Borel A.**, Density and maximality of arithmetic subgroups, J. reine und angew. Math., 224 (1966), 74—89.