если Re $\lambda > 0$, и

$$\Xi_{\mp}(\lambda) = e^{\sigma_{\pm}\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} (A e^{-(t - i\sigma_{\mp})} + B)^{-1} e^{-i\lambda t} \int_{\operatorname{Im} \mu = \beta + 1} e^{i\mu(t + i\sigma_{\mp})} F_{\mp}(\mu)\, d\mu,$$

если Re $\lambda < 0$. Из формул (15), (16) и этого представления следует

Теорема 3. *Пусть* $|\lambda^{(2)}(\mathcal{P}, \mathcal{D}_-)| > 1$, $|\sigma_{\mp}(\mathcal{P})| < \pi/2$, $(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})(\mathcal{P}, \mathcal{D}_+) > 1, \forall \mathcal{P} \in \gamma_0$; $D_{\eta_n}\varphi_{0j} > 0$ *на* $\bar{S}_0$ *и выполнены все сформулированные выше условия на операторы* $\mathcal{L}_j$ *и многообразия* S_0, S_{j0}, γ_0.

Тогда для любых достаточно гладких начально-краевых данных $f_j, \varphi_j, \varphi_{0j}$, *удовлетворяющих условиям согласования при* $t = 0$ (*см.* [1, 10]), *существует в малом по времени классическое решение задачи* (1)–(4).

Отметим, что независимо условия корректности модельной задачи для однофазной задачи Стефана в случае условий Дирихле на фиксированной границе и впервые для условия Неймана на фиксированной границе получены в работе В.А. Солонникова и Е. Фроловой.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Поступило 26 XII 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *Радкевич Е.В.* – Мат. заметки, 1990, вып. 2. 2. *Радкевич Е.В.* – ДАН, 1990, т. 310, № 6. 3. *Радкевич Е.В.* Сб. науч. тр. Мат. ин-та СО АН СССР, 1988, вып. 3, с. 101–126. 4. *Кондратьев В.А.* – Дифференц. уравнения, 1970, т. 6, с. 1831–1843. 5. *Grisvard R.* Elliptic problems in nonsmooth domains. Boston: Pitman Publ. Inc., 1985. 6. *Солонников В.А.* – Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1984, т. 138, вып. 16, с. 146–180. 7. *Зайончковский В.А., Солонников В.А.* – Там же, 1983, т. 127, с. 7–48. 8. *Багиров Л.А., Мышкис П.Л.* – Дифференц. уравнения, 1987, т. 23, № 6, с. 1072–1074. 9. *Радкевич Е.В.* О точном спектре пучка задачи Стефана. М.: Деп. ВИНИТИ, 1989, № 7614–В89. 45 с. 10. *Радкевич Е.В., Меликулов А.С.* Краевые задачи со свободной границей. Ташкент: Фан, 1988. 11. *Бейтман Т., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. 12. *Nörlund N.E.* – Acta math., 1916, vol. 40, p. 191–249. 13. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978.

УДК 512.743 МАТЕМАТИКА

© А.С. РАПИНЧУК

КОНГРУЭНЦ-ПРОБЛЕМА ДЛЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ГРУПП КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

(Представлено академиком В.П. Платоновым 2 I 1990)

Пусть G – простая односвязная алгебраическая группа над числовым полем K, S – конечное подмножество множества V^K всех неэквивалентных нормирований поля K, содержащее множество V_∞^K архимедовых нормирований. Говорят, что для группы S-целых точек $\Gamma = G_{O(S)}$ выполняется конгруэнц-свойство, если соответствующее конгруэнц-ядро $C = C^S(G)$ конечно (см. [1]). Серр [2] выдвинул предположение, получившее название конгруэнц-гипотезы, о том, что конгруэнц-свойство выполняется всякий раз, когда $\operatorname{rang}_S G = \sum_{v \in S} \operatorname{rang}_{K_v} G \geqslant 2$ и G является

K_v-изотропной для всех $v \in S \setminus V_\infty^K$. Для K-изотропных групп конгруэнц-гипотеза была доказана Рагунатаном [3, 4]. Случай K-анизотропных групп рассматривался автором [5, 6], которому удалось доказать конгруэнц-гипотезу для больших серий классических и исключительных групп. (Отметим, что в указанных ситуациях результаты Прасада, Рагунатана и автора позволяют фактически точно определить структуру конгруэнц-ядра.) В итоге конгруэнц-гипотеза остается недоказанной лишь для анизотропных групп типа A_n, связанных с некоммутативными телами, и групп типов $D_4^{3,6}$ и E_6. Тем не менее указанные результаты не позволяют до конца раскрыть механизм выполнимости конгруэнц-свойства, ибо их получение связано с использованием свойств не столько самой группы Г, сколько объемлющей алгебраической группы G. Цель настоящей работы – изложить новый подход к конгруэнц-проблеме, который опирается на исследование комбинаторных свойств группы Г. Имеются основания полагать, что на этом пути удастся завершить доказательство конгруэнц-гипотезы Серра.

Будем говорить, что группа Г имеет конечную ширину, если существуют такие $\gamma_1, \ldots, \gamma_t \in \Gamma$, что $\Gamma = \langle \gamma_1 \rangle \ldots \langle \gamma_t \rangle$, где $\langle \gamma_i \rangle$ – циклическая подгруппа, порожденная элементом γ_i.

Т е о р е м а. *Предположим, что в описанной выше ситуации* $\mathrm{rang}_S G \geqslant 2$ *и для любого* $v \notin S$ *группа* G *является* K_v*-изотропной. Тогда если группа* Г *имеет конечную ширину, то группа* $C^{ab} = C/[C, C]$ *конечна.*

Эта теорема связывает абстрактное свойство группы Г – иметь конечную ширину – с таким тонким арифметическим свойством, как конгруэнц-свойство, и тем самым дает частичное подтверждение следующей гипотезы, принадлежащей автору [7]: группа Г обладает конгруэнц-свойством в том и только том случае, если она имеет конечную ширину. Укажем еще на ряд результатов, которые подтверждают эту гипотезу и которые в действительности послужили мотивировкой при ее выдвижении. Еще в 1965 г. Басс, Милнор и Серр [8] показали, что группа $SL_n(O)$, где $n \geqslant 3$, O – кольцо целых в K, обладает конгруэнц-свойством. С другой стороны, в работе Картера и Келлера [9] установлена конечность ширины группы $SL_n(O)$. Результат Басса, Милнора, Серра был перенесен на произвольные, простые односвязные разложимые и квазиразложимые группы K-ранга не меньше 2 соответственно Мацумото [10] и Деодэром [11], в то время как конечность ширины для арифметических и s-арифметических подгрупп таких групп установлено совсем недавно О.И. Тавгенем [12]. Отметим также примеры обратного характера. Для групп $SL_2(\mathbf{Z})$ и $SL_2(O)$, где O – кольцо целых мнимого квадратичного поля, одновременно нарушается как конгруэнц-свойство [2], так и свойство конечности ширины [12]. Таким образом, для целого ряда групп конгруэнц-свойство и свойство конечной ширины выполняются или не выполняются одновременно, т.е. наша гипотеза выполняется de facto. Тем не менее отмеченные выше результаты не содержат никаких указаний на непосредственный характер взаимосвязи между конгруэнц-свойством и конечностью ширины, так что наша теорема, по-видимому, является первым результатом в этом направлении.

Переходим к изложению с х е м ы   д о к а з а т е л ь с т в а теоремы. В процессе доказательства многократно используются следующие два утверждения.

Л е м м а 1. 1) *Пусть* $v \in V^K$ *и группа* G *является* K_v*-изотропной. Тогда любое действие группы* K_v*-рациональных точек* G_{K_v} *на конечном множестве тривиально.*

2) *Предположим, что группа* G *является* K_v*-изотропной для любого* $v \notin S$. *Тогда любое непрерывное действие группы* S*-аделей* $G_{A(S)}$ *на конечном дискретном топологическом пространстве тривиально.*

Д о к а з а т е л ь с т в о легко получается из справедливости для G над K_v гипотезы Кнезера–Титса (см. [13]).

Через $H^i(*)$ будем обозначать i-ю группу непрерывных когомологий с коэффициентами в одномерном торе $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Лемма 2 [3]. *Для любых открытых компактных подгрупп $U \subset G_{K_v}$ и $W \subset G_{A(S)}$ группы $H^i(U)$ и $H^i(W)$, $i = 1, 2$, конечны.*

По определению конгруэнц-ядро $C = C^S(G)$ входит в точную последовательность

(1) $\quad 1 \to C \to \hat{G} \to \overline{G} \to 1,$

где $\hat{G}$ (соответственно $\overline{G}$) – пополнение группы G_K относительно топологии, определяемой всеми подгруппами конечного индекса в $\Gamma = G_{O(S)}$ (соответственно конгруэнц-подгруппами), см. подробнее [1]. При этом в силу сильной аппроксимационной теоремы (см. [13]) группу $\overline{G}$ можно отождествить с $G_{A(S)}$. Наряду с последовательностью (1) для любого простого p можно рассмотреть точную последовательность

(2) $\quad 1 \to C(p) \to \check{G} \xrightarrow{\pi} \overline{G} \to 1,$

где $C(p) = C/[C, C]\,C^p$, $\quad \check{G} = \hat{G}/[C, C]\,C^p$.

Предложение 1. *Предположим, что для любого простого p расширение (2) центрально (т.е. $C(p)$ лежит в центре $\check{G}$). Тогда группа C^{ab} конечна.*

Доказательство получается с помощью спектральной последовательности Хохшильда–Серра из лемм 1, 2 и того факта, что группа Γ^{ab} конечна (теорема Маргулиса).

Предположим теперь, что для некоторого простого p расширение (2) не является центральным. Тогда существует такое $v \notin S$, что действие группы G_{K_v} на $D = C(p)$, индуцированное вложением $G_{K_v} \subset \overline{G}$ и действием $\overline{G}$ на D посредством внутренних автоморфизмов, нетривиально. В этом случае нетривиальным является также действие G_{K_v} на соответствующей группе характеров D^*; пусть $d \in D^*$ не является неподвижной точкой для G_{K_v}. Замыкание $\overline{\Gamma}$ группы Γ в $\overline{G}$ имеет вид $\overline{\Gamma} = \prod_{w \notin S} \Gamma_w$, где Γ_w – группа целых w-адических точек. Положим $\Delta = \prod_{w \notin S \cup \{v\}} \Gamma_w$ и обозначим через U стабилизатор d в группе Δ; ясно, что U является открытой подгруппой конечного индекса в Δ. Будем рассматривать группы D и D^* как векторные пространства над полем $\mathbf{F}_p$ из p элементов, и пусть B – подпространство в D^*, порожденное всеми сдвигами gd, $g \in G_{K_v}$, в смысле описанного выше действия G_{K_v} на D^*.

Лемма 3. 1) $\dim_{\mathbf{F}_p} B = \infty$;

2) *U действует на B тривиально.*

Доказательство утверждения 1) вытекает из леммы 1, а утверждения 2) – из перестановочности действий групп G_{K_v} и Δ.

Положим $D_1 = \cap \operatorname{Ker} \chi$, где пересечение берется по всем характерам $\chi \in B$. Тогда D_1 является $\mathbf{F}_p$-подпространством в D, инвариантным относительно действия групп G_{K_v} и U и таким, что U действует на фактор-пространстве D/D_1 тривиально. Перейдем от расширения (2) к расширению

(3) $\quad 1 \to E \to H \xrightarrow{\varphi} G_{K_v} \to 1,$

где $E = D/D_1(D \cap [\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(U)])$, $H = [\pi^{-1}(G_{K_v} \times U), \pi^{-1}(G_{K_v} \times U)]/D_1[\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(U)]$, и обозначим через Γ' подгруппу $\Gamma \cap (\Gamma_v(\mathfrak{P}_v) \times [U, U])$, где $\Gamma_v(\mathfrak{P}_v)$ – конгруэнц-подгруппа в Γ_v по модулю идеала нормирования $\mathfrak{P}_v$.

Предложение 2. 1) *Группа E бесконечна*;

2) *E содержится в замыкании Φ группы Γ' в H.*

Доказательство утверждения 1) проводится при помощи последовательности Хохшильда–Серра с учетом лемм 2, 3; утверждение 2) вытекает из открытости Γ' в Γ относительно конгруэнц-топологии.

Последний этап рассуждений заключается в доказательстве того факта, что расширение (3) со свойствами, указанными в предложении 2, и при условии, что Γ имеет конечную ширину, существовать не может. Действительно, поскольку Γ имеет конечную ширину и индекс $[\Gamma : \Gamma']$ конечен, то Γ' также имеет конечную ширину. Поэтому группа Φ имеет конечную ширину как проконечная группа, т.е. существуют такие элементы $\gamma_1, \ldots, \gamma_t \in \Phi$, что $\Phi = \overline{\langle\gamma_1\rangle} \ldots \overline{\langle\gamma_t\rangle}$, где $\overline{\langle\gamma_i\rangle}$ – замыкание циклической подгруппы, порожденной γ_i. Обозначим через q отвечающее нормированию v простое число.

Следует различать два случая: 1) $q = p$, 2) $q \neq p$. В первом случае Φ является про-p-группой, так что к ней применимо следующее

Предложение 3. *Класс про-p-групп конечной ширины совпадает с классом аналитичечких про-p-групп.*

Доказательство получается применением одного из критериев аналитичности, см. [14, с. 206].

Итак, в нашей ситуации группа Φ аналитическая. Отсюда следует, что группа E также аналитическая, а следовательно, конечно-порожденная. С другой стороны, E является абелевой группой экспоненты p, и поэтому в итоге E конечна; противоречие.

Случай $q \neq p$ является несколько более сложным. Вначале устанавливается следующая оценка для степени представления про-q-группы над полем $\mathbf{F}_p$.

Лемма 4. *Пусть Θ – некоторая про-q-группа, p – простое $\neq q$. Тогда существует такое $\beta > 0$, что для любого непрерывного представления $\rho\colon \Theta \to GL_m(\mathbf{F}_p)$ выполняется неравенство $m \geqslant \beta \log_q |\rho(\Theta)|$.*

Лемма 5. *Действие группы $\Theta = \Gamma_v(\mathfrak{g}_v)$ на E является вполне приводимым. Более точно, $E = \prod_{i \in J} E_i$, где E_i – конечные неприводимые Θ-подмодули в E.*

Лемма 6. *Если группа Φ имеет конечную ширину как проконечная группа, то существует $e_1, \ldots, e_n \in E$ такие, что*

(4) $\quad E = \mathbf{F}_p\Theta e_1 + \ldots + \mathbf{F}_p\Theta e_n.$

Покажем теперь, что разложение (4) невозможно. Выберем элемент $s \in G_{K_v}$ таким образом, чтобы замыкание порожденной этим элементом циклической подгруппы было некомпактным. Воспользовавшись матричной реализацией G, представим элементы s и $t = s^{-1}$ в виде матриц $s = (s_{ij})$, $t = (t_{ij})$ и положим $r = 2\max\limits_{i,j}(|v(s_{ij})|, |v(t_{ij})|)$. Тогда легко видеть, что для любого целого $l \geqslant 1$ выполняется следующее включение для конгруэнц-подгрупп:

(5) $\quad s\Gamma_v(\mathfrak{g}_v^l)s^{-1} \supset \Gamma_v(\mathfrak{g}_v^{l+r}).$

Зафиксируем теперь $l \geqslant 1$ таким образом, чтобы для подгруппы E^W элементов, неподвижных относительно $W = \Gamma_v(\mathfrak{g}_v^l)$, выполнялось условие: $E^W \neq E^{G_{K_v}}$, и для целого $j \geqslant 0$ положим

$$W_j = \Gamma_v(\mathfrak{g}_v^{l+jr}), \quad J_j = \{i \mid E_i \subset E^{W_j}\}.$$

Очевидно, имеем цепочку включений

(6) $\quad J_0 \subset J_1 \subset \ldots \subset J_m \subset \ldots$

Лемма 7. *Все включения в (6) строгие.*

Доказательство использует (5) и результат Прасада [15] о том, что G_{K_v} не содержит собственных открытых некомпактных подгрупп.

Для каждого $k = 1, 2, \ldots$, выберем индекс $i_k \in J_k \setminus J_{k-1}$ и построим пространства $E(t) = \prod_{k=1}^{t} E_{i_k}$, $t = 1, 2, \ldots$ Тогда из (4) вытекает равенство

$$E(t) = \mathbf{F}_p \Theta e_1(t) + \ldots + \mathbf{F}_p \Theta e_n(t), \tag{7}$$

где $e_i(t)$ – проекция e_i на $E(t)$.

Л е м м а 8. 1) *Существуют такие целые* γ, δ, *что* $[\Theta : \Gamma_v(\mathfrak{S}_v^{l+jr})] = q^{\gamma+\delta j}$ *для всех достаточно больших* j.

2) *Существует такая константа* d, *что для любого открытого нормального делителя* $V \subset \Theta$, *содержащего* W_j, *но не содержащего* W_{j-1}, *выполняется неравенство* $[V : W_j] \leqslant d$.

Используя оценки из лемм 4, 8, несложно показать, что число элементов в правой части (7) оценивается сверху числом вида p^{at+b}, в то время как число элементов в левой части не меньше p^{ft^2+gt+h}, и мы получаем противоречие, взяв t достаточно большим.

Институт математики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
12 I 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Платонов В.П.* – УМН, 1982, т. 37, № 3, с. 3–54. 2. *Серр Ж.-П.* – Математика, 1971, т. 15, № 6, с. 12–45. 3. *Raghunathan M.S.* – Publ. Math. IHES, 1976, vol. 46, p. 107–161. 4. *Raghunathan M.S.* – Invent. Math., 1986, vol. 85, № 1, p. 73–117. 5. *Рапинчук А.С.* – Докл. АН БССР, 1988, т. 32, № 7, с. 581–584. 6. *Рапинчук А.С.* – ДАН, 1989, т. 306, № 6, с. 1304–1307. 7. *Рапинчук А.С.* Тез. докл. по теории групп. Междунар. конф. по алгебре. Новосибирск, 1989, с. 100. 8. *Басс Х., Милнор Дж., Серр Ж.-П.* – Математика, 1970, т. 14, № 6, с. 64–128; 1971, т. 15, № 1, с. 44–60. 9. *Carter D., Keller G.* – Amer. J. Math., 1983, vol. 105, № 3, p. 673–687. 10. *Matsumoto H.* – Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 1969, vol. 2, № 1, p. 1–62. 11. *Deodhar V.* – Amer. J. Math., 1978, vol. 100, № 2, p. 303–386. 12. *Тавгень О.И.* – Изв АН СССР. Сер. мат., 1990, т. 54, № 1. 13. *Платонов В.П.* – Там же, 1969, т. 33, № 6, с. 1211–1219. 14. *Lazard M.* – Publ. Math. IHES, 1965, vol. 26, p. 389–594. 15. *Prasad M.* – Bull. sci. math., 1982, vol. 110, № 2, p. 197–202.

УДК 517.55 МАТЕМАТИКА

© Л.И. РОНКИН

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА В ЗАМКНУТОМ КОНУСЕ

(Представлено академиком В.А. Марченко 25 XII 1989)

В [1–3] установлены основные факты теории субгармонических функций вполне регулярного роста (ф.в.р.р.) в открытом конусе*. Здесь будут приведены различные условия в.р.р. в замнутом конусе. Для голоморфных функций в полуплоскости соответствующие вопросы рассмотрены ранее Н.В. Говоровым [4–6].

*Некоторые факты, относящиеся в лучам в.р.р. субгармонических функций в конусе, установлены Л. Груменом [7, 8].